

**Uniwersytet Wrocławski**  
Wydział Matematyki i Informatyki  
Instytut Informatyki

**Andrzej Kozioł**

# **Symulowanie zjawisk świetlnych nad i pod wodą**

**Praca magisterska**

Praca wykonana pod kierunkiem  
**dr Andrzeja Łukaszewskiego**

Wrocław 2 września 2005



## Streszczenie

Celem tej pracy jest zbudowanie modelu zjawisk świetlnych zachodzących nad i pod powierzchnią wody, oraz synteza realistycznych obrazów takiej symulacji. Praca przedstawia model zjawisk świetlnych zachodzących w wodzie, przykładową implementację, oraz obrazy wygenerowane za jej pomocą.

Materiał zawarty w pracy podzielono na trzy rozdziały.

Pierwszy jest wprowadzeniem teoretycznym będącym podstawą do omawianego modelu zachowania światła w wodzie.

Drugi jest opisem samej metody modelowania, algorytmów i struktur danych używanych podczas modelowania powierzchni wody i metody obliczania oświetlenia.

Ostatni rozdział jest opisem implementacji metody i przedstawia wyniki symulacji.

Do pracy dołączono płytę CD na której znajdują się źródła implementacji, oraz wygenerowane przykładowe obrazy.

# Spis treści

|                                              |    |
|----------------------------------------------|----|
| <b>Wstęp</b>                                 | 4  |
| <b>1. Podstawy teoretyczne</b>               | 5  |
| 1.1. Geometria                               | 5  |
| 1.1.1. Sferyczny układ współrzędnych         | 5  |
| 1.1.2. Kąt bryłowy                           | 6  |
| 1.2. Analiza pól skalnych i wektorowych      | 7  |
| 1.2.1. Pole skalarne i wektorowe             | 7  |
| 1.2.2. Gradient pola skalarne                | 7  |
| 1.2.3. Operator Hamiltona „nabla” $\nabla$   | 8  |
| 1.2.4. Pochodna kierunkowa                   | 8  |
| 1.3. Metoda Monte-Carlo                      | 8  |
| 1.3.1. Przyspieszanie zbieżności             | 9  |
| 1.4. Światło                                 | 10 |
| 1.4.1. Natura światła                        | 10 |
| 1.4.2. Radiometria                           | 10 |
| 1.4.3. BRDF                                  | 11 |
| 1.5. Odbicie i refrakcja                     | 12 |
| 1.5.1. Odbicie światła                       | 12 |
| 1.5.2. Załamanie światła                     | 13 |
| 1.6. Efekty wolumetryczne                    | 14 |
| 1.6.1. Funkcja fazowa                        | 16 |
| <b>2. Synteza obrazu i model powierzchni</b> | 17 |
| 2.1. Metody śledzenia promieni               | 17 |
| 2.1.1. Śledzenie promieni                    | 17 |
| 2.1.2. Śledzenie ścieżek                     | 18 |
| 2.2. Metoda mapy fotonów                     | 19 |
| 2.2.1. Struktura danych                      | 21 |
| 2.2.2. Efekty kaustyczne                     | 21 |
| 2.2.3. Efekty wolumetryczne                  | 22 |
| 2.3. Powierzchnia wody                       | 24 |

|                           |    |
|---------------------------|----|
| <b>3. Podsumowanie</b>    | 28 |
| 3.1. Wyniki               | 28 |
| 3.2. Opis implementacji   | 29 |
| <b>Dodatek – płyta CD</b> | 33 |
| <b>Bibliografia</b>       | 34 |

# Spis rysunków

|      |                                                                                                                          |    |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1. | Sferyczny układ współrzędnych . . . . .                                                                                  | 5  |
| 1.2. | Kąt bryłowy . . . . .                                                                                                    | 6  |
| 1.3. | Wykres funkcji $f$ . . . . .                                                                                             | 9  |
| 1.4. | Funkcja BRDF . . . . .                                                                                                   | 12 |
| 1.5. | Odbicie światła . . . . .                                                                                                | 13 |
| 1.6. | Odbicie światła . . . . .                                                                                                | 14 |
| 1.7. | Absorpcja światła . . . . .                                                                                              | 15 |
| 1.8. | Rozproszenie światła . . . . .                                                                                           | 15 |
| 1.9. | Zasilenie strumienia światła przez rozproszenie światła z innych kierunków                                               | 15 |
| 2.1. | Metoda śledzenia promieni . . . . .                                                                                      | 18 |
| 2.2. | Metoda mapowania fotonów . . . . .                                                                                       | 20 |
| 2.3. | Mapa fotonów kaustycznych . . . . .                                                                                      | 22 |
| 2.4. | Ray marching . . . . .                                                                                                   | 23 |
| 2.5. | Wielkości używane przy obliczaniu powierzchni wody . . . . .                                                             | 25 |
| 2.6. | Wyrenderowana powierzchnia wody . . . . .                                                                                | 27 |
| 3.1. | Scena wyrenderowana za pomocą metody śledzenia ścieżek . . . . .                                                         | 29 |
| 3.2. | Sceny wyrenderowane za pomocą metody śledzenia ścieżek i metody mapowania fotonów (około 2.2 milionów fotonów) . . . . . | 31 |
| 3.3. | Scena widziana pod innym kątem . . . . .                                                                                 | 32 |
| 3.4. | Rzeczywista scena podwodna . . . . .                                                                                     | 32 |

# Wstęp

Wszyscy podziwialiśmy refleksy świetlne na dnie basenu czy strumienia. Ciekawe, dynamicznie zmieniające się wzory kaustyk przyciągają oko i można na nie patrzeć godzinami. Nic dziwnego że chcemy je utrwalić. Zrobienie fotografii czy filmu nie jest problemem, jednak wygenerowanie foto-realistycznych obrazów takich zjawisk w komputerze nie jest łatwe. Bogactwo zjawisk fizycznych towarzyszące interakcji światła z wodą następcza poważne problemy przy kreacji takich obrazów. Jednak dzięki zastosowaniu opracowanej w ostatnich latach metody modelowania oświetlenia za pomocą map fotonów, udało mi się wygenerować realistyczne obrazy wody w sensownym czasie na zwykłym domowym komputerze.

Aby zasymulować zachowanie się światła przy interakcji z wodą trzeba najpierw przedstawić całość zachodzących przy tym zjawisk fizycznych. Właściwe zrozumienie ugięcia promienia światła na powierzchni obiektu przezroczystego jest kluczowe przy modelowaniu kaustyk. Inne zjawiska optyczne zachodzące w wodzie, jak np. rozpraszanie światła wewnątrz cieczy są również nie do pominięcia przy opisie tego problemu.

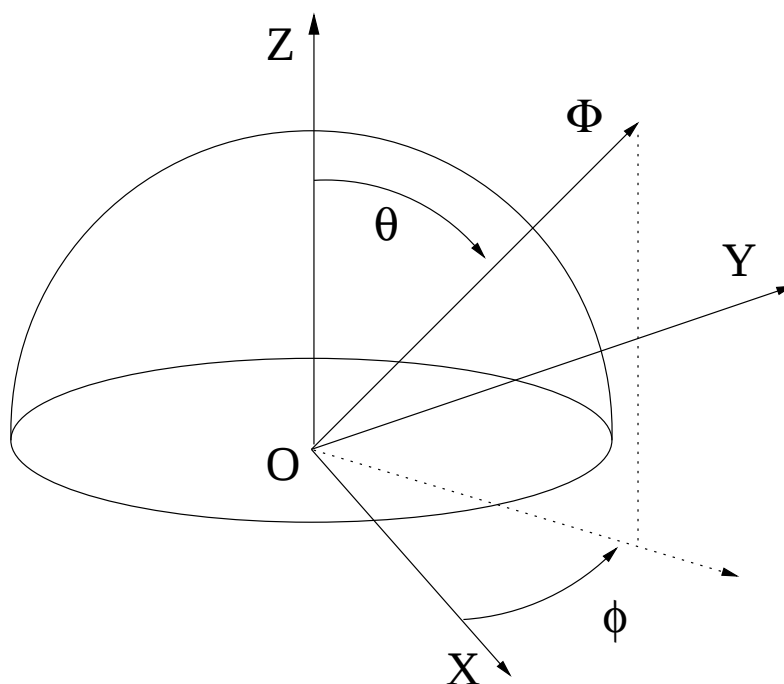
Aby wygenerować realistyczne kaustyki należy wcześniej wygenerować realistyczną powierzchnię wody. W tym celu zastosowałem opracowaną niedawno metodę statystyczną, generującą realistyczną powierzchnię wody na podstawie jej widma. Metoda ta umożliwia również szybkie tworzenie następujących po sobie stanów powierzchni wody, co umożliwia generowanie animacji.

# Rozdział 1

## Podstawy teoretyczne

### 1.1. Geometria

#### 1.1.1. Sferyczny układ współrzędnych



Rysunek 1.1: Sferyczny układ współrzędnych

Najczęściej używanym układem współrzędnych jest układ kartezjański. Jednak w wielu zastosowaniach wygodniejszy i bardziej intuicyjny bywa układ sferyczny. Do jego zdefiniowania potrzebny jest punkt centralny układu, oraz dwie osie –  $X$  i  $Z$ . Osie te mają takie samo znaczenie jak w układzie kartezjańskim. Oś  $X$  jest pewnym kierunkiem przechodzącym przez punkt centralny układu na wybranej płaszczyźnie,

a oś  $Z$  jest kierunkiem zgodnym z wektorem normalnym tej płaszczyzny i również przechodzi przez punkt centralny układu.

Współrzędne w tym układzie to dwa kąty:  $\phi \in [0, 2\pi)$  – azymut i  $\theta \in [0, \pi]$  – nachylenie, oraz odległość od punktu centralnego  $r$ . Wektor kierunku oznaczany jest jako  $\Theta = (\phi, \theta)$ .

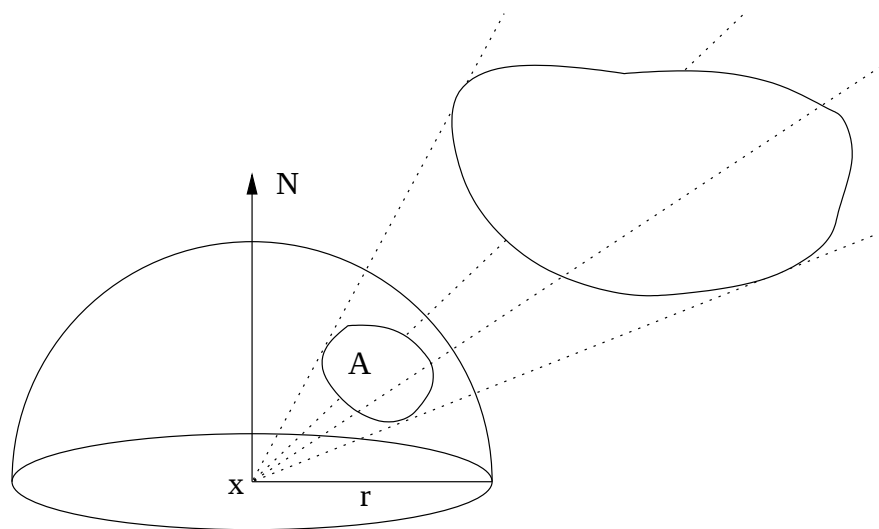
Transformacja współrzędnych sferycznych do układu kartezjańskiego ma postać:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \sin \theta \\ y &= r \sin \phi \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (1.1)$$

Odwrotnie, transformacja współrzędnych kartezjańskich do układu sferycznego wygląda następująco:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi &= \arctan \frac{y}{x} + \phi_0, \quad \phi_0 = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \geq 0 \text{ i } y \geq 0 & \text{(I ćwiartka)} \\ \pi & \text{dla } x < 0 & \text{(II i III ćwiartka)} \\ 2\pi & \text{dla } x \geq 0 \text{ i } y < 0 & \text{(IV ćwiartka)} \end{cases} \\ \theta &= \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} + \theta_0, \quad \theta_0 = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \geq 0 \\ \pi & \text{dla } z < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (1.2)$$

### 1.1.2. Kąt bryłowy



Rysunek 1.2: Kąt bryłowy

**Kąt bryłowy** jest to część przestrzeni ograniczona powierzchnią stożkową, odcinającą obszar o polu powierzchni  $A$  na powierzchni kuli o promieniu  $r$  i środku pokrywającym się z wierzchołkiem powierzchni stożkowej. Wartość kąta bryłowego można

wyrazić wzorem

$$\Omega = \frac{A}{r^2} \quad (1.3)$$

Kąt bryłowy wyraża się w steradianach (sr). Łatwo zauważyć, że największą wartość jaką może mieć jakikolwiek kąt bryłowy to  $4\pi$ , czyli kąt bryłowy wyznaczony przez sferę.

W celu obliczenia kąta bryłowego w jakim jest widziana powierzchnia lub obiekt w przestrzeni z danego punktu  $x$ , należy obliczyć wielkość rzutu na sferę jednostkową, której centrum znajduje się w tym punkcie.

## 1.2. Analiza pól skalarnych i wektorowych

### 1.2.1. Pole skalarne i wektorowe

Dowolną funkcję o wartościach rzeczywistych zależną od położenia w czasie i przestrzeni nazywamy **polem skalarnym**.

$$S = f(\text{położenie, czas}) \quad (1.4)$$

Analogicznie, dowolną funkcję o wartościach wektorowych zależną od położenia w czasie i przestrzeni nazywamy **polem wektorowym**.

$$\vec{W} = \Phi(\text{położenie, czas}) \quad (1.5)$$

### 1.2.2. Gradient pola skalarnego

**Gradientem pola skalarnego**  $S$  w punkcie  $u$  nazywamy wektor wskazujący kierunek największego wzrostu  $S$  z tego punktu, i co do wartości równy szybkości tego wzrostu w tym kierunku, tzn.:

$$\text{grad}(S) = \vec{n} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{f(u + \varepsilon \vec{n}) - f(u)}{\varepsilon} \right] \quad (1.6)$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem normalnym do **powierzchni izoskalarnej** (znanej też jako powierzchnia ekwiskalarna) określonej w punkcie  $u$ . Powierzchnię tę definiuje się jako zbiór punktów w przestrzeni, dla których funkcja  $S$  przyjmuje taką samą wartość.

Jak widać, gradient pola skalarnego jest polem wektorowym.

W kartezjańskim układzie współrzędnych ( $S = f(x, y, z)$ ) wielkość gradientu ma szczególnie prostą postać:

$$\text{grad}(S) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] \quad (1.7)$$

### 1.2.3. Operator Hamiltona „nabla” $\nabla$

W celu uporządkowania i łatwego zapisu powyższych pojęć często stosowany jest tzw. **operator Hamiltona „nabla”**  $\nabla$ . W układzie kartezjańskim jest to symboliczny wektor, którego składowymi są operatory różniczkowania względem poszczególnych zmiennych przestrzennych

$$\nabla = \left[ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (1.8)$$

Za pomocą operatora  $\nabla$  można zapisać wiele wielkości matematycznych, w tym gradient:

$$\text{grad}(S) = \nabla \cdot S \quad (1.9)$$

### 1.2.4. Pochodna kierunkowa

Weźmy funkcję  $f$  definiującą w przestrzeni pole skalarne  $S$ . Weźmy też pewien punkt  $u$  i pewien kierunek  $\vec{\Theta}$  z wektorem jednostkowym  $\theta$  wskazującym w tym kierunku. Granicę (o ile istnieje)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(u + \varepsilon\theta) - f(u)}{\varepsilon} = f'_\theta(u) \quad (1.10)$$

nazywamy **pochodną funkcji  $f$  w kierunku  $\vec{\Theta}$  w punkcie  $u$** , lub krótko **pochodną kierunkową funkcji  $f$** .

Można ją krótko zapisać za pomocą operatora Hamiltona:

$$f'_\theta = (\vec{\Theta} \nabla) f \quad (1.11)$$

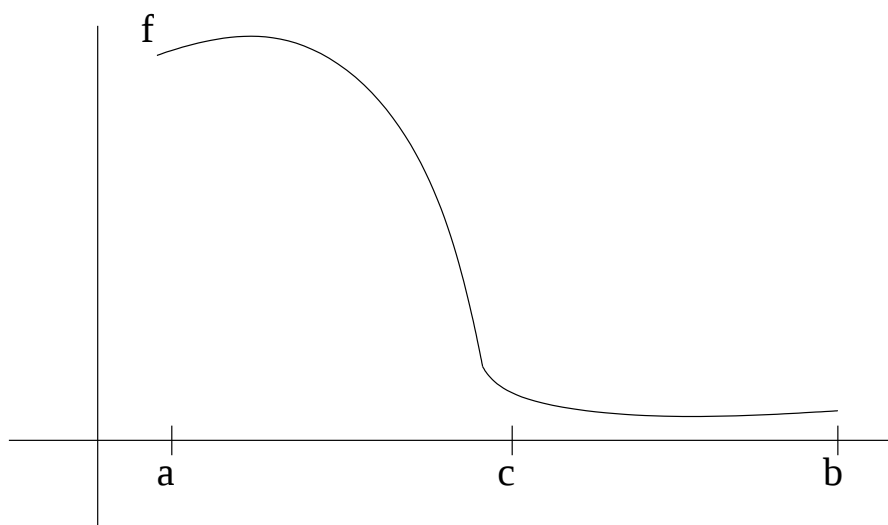
## 1.3. Metoda Monte-Carlo

Przy symulowaniu zjawisk rzeczywistych często staje się przed problemem zbyt dużej złożoności symulowanego zjawiska. Jedną z metod radzenia sobie z tym problemem jest uproszczenie modelu tak, aby realne stało się jego obliczenie. Niestety otrzymane wyniki często odbiegają od realnych. Innym podejściem do opisanego problemu jest zastosowanie **metody Monte-Carlo**. Metoda ta polega na tym, iż dany problem przedstawia się w postaci gry losowej która prowadzi do rozwiązania tego problemu. Zmienną losową są parametry zadania. Wyznacza się  $N$  realizacji zadania dla danej zmiennej losowej, a następnie szacuje się wartość oczekiwaną zadania za pomocą średniej arytmetycznej tych realizacji.

Dla przykładu, jeśli chcemy policzyć całkę z funkcji  $f$  przedstawionej na rysunku 1.3<sup>1</sup>, dla której umiemy policzyć wartość w każdym punkcie przedziału całkowania  $(a, b)$ . Losujemy punkt  $x_0$  z przedziału  $(a, b)$  z rozkładem jednostajnym i obliczamy wartość funkcji w tym punkcie. Jako wynik przyjmujemy pole prostokąta o długości  $b - a$  i wysokości  $f(x_0)$ . Procedurę powtarzamy  $N$  razy dla kolejno losowanych próbek od

---

<sup>1</sup>Istnieją lepsze metody dla liczenia całki pojedynczej, np. metoda trapezów



Rysunek 1.3: Wykres funkcji  $f$

$x_0$  do  $x_N$ , a jako wynik ostateczny przyjmujemy średnią arytmetyczną otrzymanych wyników:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(x_i)(b-a) = (b-a) \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N f(x_i) \quad (1.12)$$

Przy zwiększaniu  $N$  wynik metody dąży do wyniku dokładnego, niestety zbieżność ta jest dość słaba. Tak więc potrzeba bardzo wielu próbkowań aby uzyskać dużą dokładność.

### 1.3.1. Przyspieszanie zbieżności

Zbieżność metody można poprawić, na podstawie kształtu funkcji (lub kształtu funkcji przybliżonego za pomocą znanych wartości tej funkcji). Osiąga się to wybierając z większym prawdopodobieństwem te próbki które mają większą istotność dla wyniku, oraz zmniejszając prawdopodobieństwo wyboru próbek mało wnoszących do wyniku.

W powyższym przykładzie na rysunku 1.3 widać, że na odcinku  $(c, b)$  wyniki funkcji są stosunkowo małe i niewiele wnoszą do ostatecznego wyniku. Jeśli losowane punkty w których obliczane są wyniki pośrednie będą częściej wybierane z przedziału  $(a, c)$ , niż z przedziału  $(c, b)$  to zbieżność metody będzie szybsza. Jeśli zamiast losowania z rozkładem jednostajnym użyje się losowania z rozkładem  $p(x)$  to wynik tak zmodyfikowanej metody wygląda następująco:

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \frac{f(x_i)}{p(x_i)} \quad (1.13)$$

Jest to ogólniejsza wersja wzoru 1.12.

Więcej na temat metody Monte Carlo w [18, 19].

## 1.4. Światło

### 1.4.1. Natura światła

Światło widzialne jest to promieniowanie elektromagnetyczne w zakresie odbieranym przez oko ludzkie (w przybliżeniu pomiędzy 380nm i 780nm). Badaniem zachowywania się światła zajmuje się gałąź fizyki zwana **optyką**. Istnieje kilka modeli wyjaśniających naturę światła [2, 3]:

**optyka geometryczna** Najstarszy i najprostszy model, opracowany przez Newtona, zakładający iż światło porusza się po liniach prostych. Ze względu na swą prostotę model ten jest używany w grafice komputerowej.

**optyka falowa** Alternatywny model, przyjęty w XIX wieku, opisujący światło jako fale. Model ten wyjaśnia efekty dyfrakcji i interferencji. Zakłada on iż światło jest falą elektromagnetyczną i opisywany jest przez równania Maxwella.

**optyka kwantowa** Intensywny rozwój fizyki na przełomie XIX i XX wieku doprowadził do powstania całej nowej gałęzi fizyki – fizyki kwantowej. W 1905 roku A. Einstein stworzył **kwantową teorię światła**. Zakłada ona że światło ma naturę dyskretną, więc promieniowanie i pochłanianie promieniowania elektromagnetycznego przez materiały odbywa się porcjami – **kwantami**. Kwant światła nazwano **fotonem**. Można pokazać, że modele kwantowy i falowy są równoważne. Światło ma jednocześnie naturę falową i dyskretną. Zjawisko to nazwano **dualizmem korpuskularno-falowym**.

Prosty model geometryczny wystarczy aby zasymulować skomplikowane zjawisko jakim są kaustyki. Efektywną metodą obliczeń jest metoda map fotonów. Używając metody Monte-Carlo można również zasymulować bardziej skomplikowane modele – falowy i kwantowy, jednak modele te nie są niezbędne do symulacji zjawisk podwodnych rozważanych w tej pracy.

### 1.4.2. Radiometria

Radiometria jest nauką zajmującą się mierzaniem energii promienistej w każdej części widma elektromagnetycznego. Ponieważ światło jest formą energii elektromagnetycznej, radiometria używana jest w grafice komputerowej do obliczania oświetlenia. Radiometria używa następujących pojęć:

**Energia fotonu**( $e_\lambda$ ): Foton o długości fali  $\lambda$  niesie porcję (kwant) energii, definiowaną przez  $e_\lambda = hc/\lambda$ , gdzie  $h$  jest stałą Plancka ( $h \approx 6.626 * 10^{-34} J * s$ ), a  $c$  jest prędkością światła w próżni ( $c = 299\,792\,458 m/s$ ).

**Spektralna energia promieniowania (Spectral Radiant Energy)**( $Q_\lambda$ ):  $n_\lambda$  fotonów o długości fali  $\lambda$  przenosi energię  $Q_\lambda = n_\lambda e_\lambda$

**Energia promieniowania (Radiant Energy)( $Q$ ):** mierzona w dżulach ( $J$ ). Łączna energia fotonów obliczana przez całkowanie energii spektralnej po wszystkich długościach fali:  $Q = \int_0^\infty Q_\lambda d\lambda$ .

**Strumień energii (Radiant Flux)( $\Phi$ ):** mierzony w watach ( $W$ ). Energia promieniowania przepływająca przez powierzchnię na jednostkę czasu,  $dQ/dt$ .

**Gęstość strumienia energii (Radiant Flux Density)( $d\Phi/dA$ ):** mierzona w watach na metr kwadratowy ( $W/m^2$ ). Strumień energii przepływający przez jednostkę powierzchni.

**Promieniowanie wychodzące (Radiant Exitance, Radiosity)( $B$ ):** mierzone w watach na metr kwadratowy ( $W/m^2$ ). Strumień energii opuszczający jednostkę powierzchni.

**Natężenie napromieniowania (Irradiance)( $E$ ):** mierzona w watach na metr kwadratowy ( $W/m^2$ ). Strumień energii padający na jednostkę powierzchni obiektu.

**Intensywność promieniowania (Radiant Intensity)( $I$ ):** mierzona w watach na steradian ( $W/sr$ ). Reprezentuje strumień energii wychodzący z punktowego źródła w pewnym kierunku. Jest to więc strumień energii na kąt bryłowy,  $d\Phi/d\omega$ .

**Radiancja (Radiance)( $L$ ):** mierzona w watach na steradian na metr kwadratowy ( $W/(sr * m^2)$ ). Jest to strumień energii przychodzący lub wychodzący z powierzchni w danym kierunku  $\Theta$  na kąt bryłowy, na jednostkę powierzchni prostopadłej do kierunku  $\Theta$ . Definiowana jest jako  $L(x \rightarrow \Theta) = d^2\Phi / (cos\theta dA d\omega)$  dla danego kierunku  $\Theta$ . Radiancja nie zmienia się z odległością. Jest to wielkość na jaką jest czuła większość odbiorników światła, w tym również ludzkie oko.

Notacja:

$L(x \leftarrow \Theta)$  – radiancja przychodząca do punktu  $x$  z kierunku  $\Theta$

$L(x \rightarrow \Theta)$  – radiancja opuszczająca punkt  $x$  w kierunku  $\Theta$

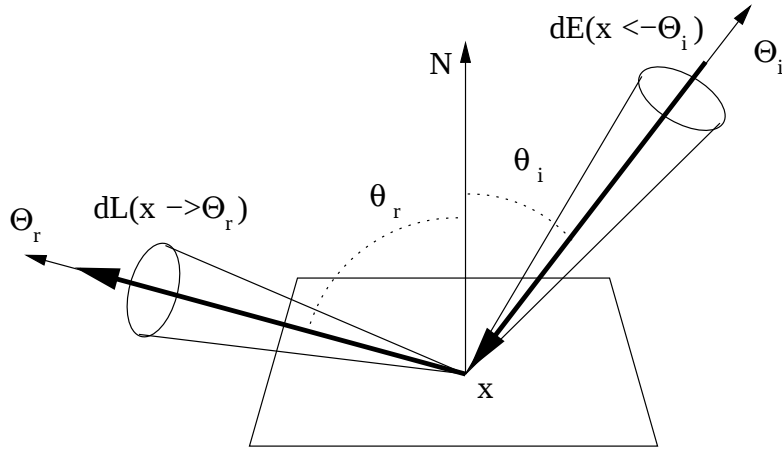
$L(x \leftarrow y)$  – radiancja przychodząca do punktu  $x$ , a wychodząca z punktu  $y$

$L(x \rightarrow y)$  – radiancja opuszczająca punkt  $x$  i docierająca do punktu  $y$

### 1.4.3. BRDF

Kiedy światło pada na powierzchnię w punkcie  $x$  z kierunku  $\Theta_i$ , jego część odbija się (lub ulega załamaniu w przypadku przejścia światła przez powierzchnię) w kierunku  $\Theta_r$ . Aby określić jaka jest to część Nicodemus [1] wprowadził pojęcie funkcji BRDF (Bidirectional Reflectance Distribution Function). Funkcję tą definiuje się jako stosunek radiancji odbitej w punkcie  $x$  w kierunku  $\Theta_r$  do radiancji padającej na ten punkt z kierunku  $\Theta_i$ :

$$f_r(x, \Theta_i \rightarrow \Theta_r) = \frac{dL(x \rightarrow \Theta_r)}{dE(x \leftarrow \Theta_i)} = \frac{dL(x \rightarrow \Theta_r)}{L(x \leftarrow \Theta_i) \cos\theta d\theta} \quad (1.14)$$



Rysunek 1.4: Funkcja BRDF

W przypadku kiedy zamiast odbicia rozpatrujemy ugięcie promienia, mówimy o funkcji BTDF (Bidirectional Transmittance Distribution Function). Jej definicja i własności są analogiczne do funkcji BRDF.

Funkcja BRDF ma dwie ważne własności. Pierwszą z nich jest **zasada wzajemności Helmholtza**. Mówi ona, iż funkcja BRDF jest symetryczna względem kierunków padania i odbicia, czyli jej wartość pozostanie niezmienną po odwróceniu tych kierunków.

$$f_r(x, \Theta_i \rightarrow \Theta_r) = f_r(x, \Theta_i \leftarrow \Theta_r) = f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) \quad (1.15)$$

Drugą z własności funkcji BRDF jest **zasada zachowania energii**. Zgodnie z nią w dowolnych procesach zachodzących w układzie odosobnionym całkowita energia układu pozostaje stała. Wynika stąd, iż ilość odbitego (i załamane) światła w danym punkcie  $x$  i w dowolnym kierunku nie może być większa niż ilość padającego na ten punkt światła.

$$\forall \Theta : \int_{\Omega} f_r(x, \Theta \leftrightarrow \Theta_i) \cos(N, \Theta_i) d\Theta_i \leq 1 \quad (1.16)$$

gdzie  $N$  jest wektorem normalnym w punkcie  $x$ .

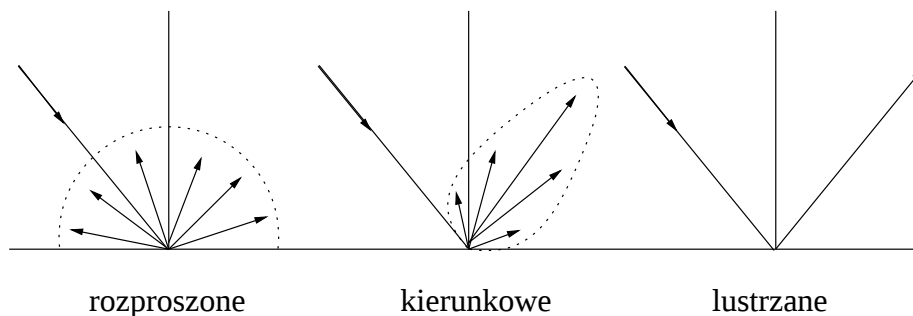
## 1.5. Odbicie i refrakcja

Kiedy fala świetlna pada na dowolne ciało, może odbić się od jego powierzchni, przejść przez jego powierzchnię, lub zostać pochłonięta.

### 1.5.1. Odbicie światła

Część strumienia światła padającego na powierzchnię odbija się od niej. Jeśli powierzchnia graniczna jest gładka, tzn. jej mikro-nierówności są większe od długości fali, to fala odbija się od takiej powierzchni we wszystkich kierunkach. Mówimy wtedy

o rozproszeniu światła na powierzchniach matowych (Lambertowskich). Jeśli natomiast mikro-nierówności są mniejsze, to odbicie zaczyna nabierać charakteru kierunkowego i większa część światła jest odbijana w jednym kierunku. Gdy powierzchnie są gładkie, wtedy mamy do czynienia z odbiciem lustrzanym. W takich przypadkach możemy operować pojęciem promienia (padającego i odbitego).



Rysunek 1.5: Odbicie światła

### 1.5.2. Załamanie światła

Część światła padającego na powierzchnię ciała wnika pod jego powierzchnię zgodnie z prawem załamania (prawo Snelliusa):

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1} \quad (1.17)$$

gdzie:

$\alpha$  – kąt padania światła na powierzchnię

$\beta$  – kąt załamania światła

$v_1$  – prędkość światła w ośrodku I

$v_2$  – prędkość światła w ośrodku II

$n_{2,1}$  – współczynnik załamania ośrodka II względem ośrodka I

Współczynnik  $n$  jest wielkością stałą (chyba że ośrodek jest dwójłomny<sup>2</sup>). Jeśli ośrodkiem I jest próżnia, to współczynnik  $n$  nosi nazwę bezwzględnego

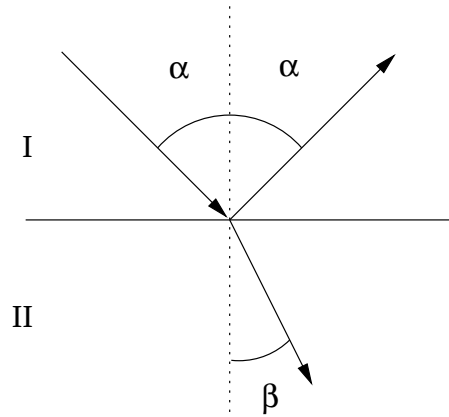
$$n = \frac{c}{v} \quad (1.18)$$

Bieg światła jest odwracalny, a więc

$$n_{1,2} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{n_{2,1}} \quad (1.19)$$

---

<sup>2</sup>Z powodu specyficznej budowy krystalograficznej, w niektórych materiałach krystalicznych może się rozchodzić tylko światło spolaryzowane. Po przejściu przez taki obiekt niespolaryzowany promień światła jest rozszczepiany na dwa promienie spolaryzowane ortogonalnie względem siebie. Takie kryształy noszą nazwę dwójłomnych (albo podwójnie łamiących). Przykładem kryształów dwójłomnych jest kalcyt, kwarc krystaliczny, czy lód.



Rysunek 1.6: Odbicie światła

Rozważmy sytuację, gdy światło przechodzi z ośrodka I do ośrodka II. Niech pierwszy ośrodek będzie scharakteryzowany przez bezwzględny współczynnik załamania  $n_1$ , a drugi przez  $n_2$ . Zgodnie z prawem załamania

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} \quad (1.20)$$

Wykorzystując 1.18 mamy

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c/n_1}{c/n_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.21)$$

Możemy więc zapisać

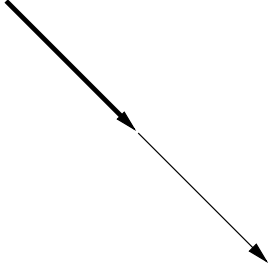
$$n_{2,1} = \frac{n_2}{n_1} \quad (1.22)$$

Jeśli więc znamy bezwzględne współczynniki załamania światła dwóch ośrodków, to możemy w pełni opisać załamanie promienia na ich granicy.

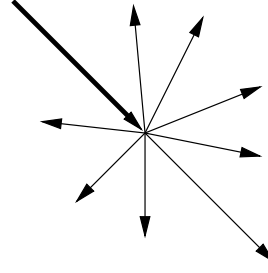
## 1.6. Efekty wolumetryczne

W każdym punkcie ośrodka  $x$  przez który przechodzi strumień światła, może zostać on osłabiony poprzez absorpcję fotonów przez ośrodek (rysunek 1.7) lub rozpraszanie fotonów przez cząsteczki ośrodka (rysunek 1.8). W zamian strumień może zostać zasilony fotonami rozpraszanymi z innych kierunków (rysunek 1.9), albo fotonami powstałymi na skutek emisji w ośrodku (np. w płomieniu, czy na skutek zjawisk kwantowych). Ponieważ rozpatrywanym w tej pracy ośrodkiem jest woda, w której emisja zachodzi w stopniu zaniedbywalnym, więc zjawisko emisji zostanie pominięte w tych rozważaniach.

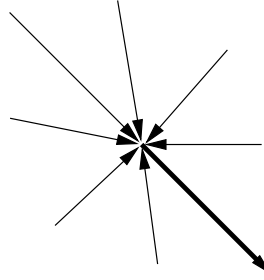
Prawdopodobieństwo absorpcji fotonu podczas przechodzenia przez ośrodek dane jest poprzez współczynnik  $\sigma_a$ , a prawdopodobieństwo zmiany kierunku przez współczynnik  $\sigma_s$ .



Rysunek 1.7: Absorpcja światła



Rysunek 1.8: Rozproszenie światła



Rysunek 1.9: Zasilenie strumienia światła przez rozproszenie światła z innych kierunków

Zmiana radiancji  $L$  wzdłuż ścieżki wywołana pochłanianiem fotonów przez ośrodki wyraża się następującym równaniem

$$(\vec{\Theta} \cdot \nabla)L(x \rightarrow \Theta) = -\sigma_a L(x \leftarrow \Theta_i) \quad (1.23)$$

Podobnie, zmiana radiancji wywołana rozpraszaniem fotonów wygląda następująco

$$(\vec{\Theta} \cdot \nabla)L(x \rightarrow \Theta) = -\sigma_s L(x \leftarrow \Theta_i) \quad (1.24)$$

W każdym punkcie ośrodka przechodzące przezeń promienie światła zostają rozproszone, a część ich energii rozproszona zostaje w kierunku obserwatora

$$(\vec{\Theta} \cdot \nabla)L(x \rightarrow \Theta) = \sigma_s \int_{\Omega_{4\pi}} p(x, \Theta_i, \Theta) L_i(x \leftarrow \Theta_i) d\Theta_i \quad (1.25)$$

gdzie  $p$  jest funkcją fazową ośrodka opisującą sposób rozpraszania (pełny opis w 1.6.1). Wynika stąd, iż im dłuższą drogę przechodzi światło przez ośrodek, tym mniej zachowuje pierwotnej informacji. Dlatego kolor oddalonych obrazów gór jest przesunięty w stronę niebieskiego – koloru nieba. Z tego samego powodu gęsta mgła czy chmura jest nieprzejrzysta, ponieważ światło ulega całkowitemu rozproszeniu wewnątrz obiektu. Do obserwatora dochodzi jedynie światło pochodzące z wielokrotnych wewnętrznych odbić i załamania.

### 1.6.1. Funkcja fazowa

Strumień fotonów ulega rozproszeniu wewnątrz obiektu zgodnie z rozkładem charakterystycznym dla tego obiektu. Rozkład ten opisywany jest przez **funkcję fazową**  $p$ . Jest ona bezwymiarowa. Całka po sferze z funkcji fazowej musi równać się jedności:

$$\int_{\Omega_{4\pi}} p(x, \Theta_i, \Theta) d\vec{\Theta}_i = 1 \quad (1.26)$$

Funkcja fazowa często zależy tylko od kąta  $\theta \in [0, \pi]$  pomiędzy promieniem przychodzącym a rozproszonym. Może być wówczas zapisana jako  $p(\theta)$ . Dla  $\theta = 0$  promień nie ulega rozproszeniu, a dla  $\theta = \pi$  promień rozproszony ma kierunek przeciwny do przychodzącego.

#### Rozproszenie izotropowe

Przy rozpraszaniu izotropowym prawdopodobieństwa rozproszenia fotonu będą dla każdego kierunku identyczne. Tak więc funkcja fazowa jest stałą:

$$p(\theta) = \frac{1}{4\pi} \quad (1.27)$$

#### Funkcja fazowa Heyney'a-Greenstein'a

Najczęściej używaną funkcją fazową jest funkcja fazowa Heyney'a-Greenstein'a [4]. Jest ona opracowana empirycznie dla wyjaśnienia rozpraszania światła w pył międzygalaktycznym, ale dobrze się sprawdza dla większości innych ośrodków, w tym również wody.

Funkcja fazowa Heyney'a-Greenstein'a definiowana jest następująco:

$$p(\theta) = \frac{1 - g^2}{4\pi(1 + g^2 - 2g \cos\theta)^{1.5}} \quad (1.28)$$

gdzie  $g \in [-1, 1)$  jest parametrem asymetryczności ośrodka, równym uśrednionemu kosinusowi kierunków rozpraszania:

$$g = \int_0^\pi p(\theta) \cos\theta d\theta \quad (1.29)$$

# Rozdział 2

## Synteza obrazu i model powierzchni

### 2.1. Metody śledzenia promieni

Podstawą do generowania realistycznych obrazów za pomocą komputera jest równanie oświetlenia [7].

$$L(x \rightarrow \Theta_r) = \int_{\Omega} f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) L(x \leftarrow \Theta_i) \cos\theta_i d\Theta_i \quad (2.1)$$

#### 2.1.1. Śledzenie promieni

Podstawową metodą modelowania światła za pomocą komputera jest zaproponowany przez Whitted'a [16] **ray tracing** (metoda śledzenia promieni). W metodzie tej mamy ustaloną scenę z rozmieszczonymi obiektami, oraz punkt z którego scena jest obserwowana. Następnie przez każdy piksel wirtualnego ekranu od punktu obserwacji prowadzony jest promień przebiegający przez scenę. Dokonuje się sprawdzenia z którym obiektem sceny promień przecina się jako pierwszym. Dla tego obiektu ustala się jaki kolor ma światło odbijające się od obiektu w kierunku kamery w punkcie przecięcia. W tym celu generuje się nowe promienie w kierunku światła (tzw. shadow-rays) sprawdzające czy obiekt jest bezpośrednio oświetlony, a następnie wykorzystuje się lokalne modele oświetlenia (np. prosty model Phong'a [5], czy oparty na własnościach fizycznych materiału model Cook'a-Torrance'a [6]), w celu obliczenia koloru i intensywności światła odbijającego się od obiektu w kierunku obserwatora. Aby uzyskać bardziej realistyczne efekty, jak odbicia i przezroczystość, generuje się nowe promienie z punktu przecięcia: odbity i ugięty. Dla każdego z nich obliczenia są identyczne jak dla promienia pierwotnego. Światło odbite i ugięte traktuje się jak nowe źródła światła i postępuje analogicznie jak poprzednio. Po dokonaniu wszystkich obliczeń kolor promienia jest zapisywany.

Równanie oświetlenia dla metody śledzenia promieni wygląda następująco:

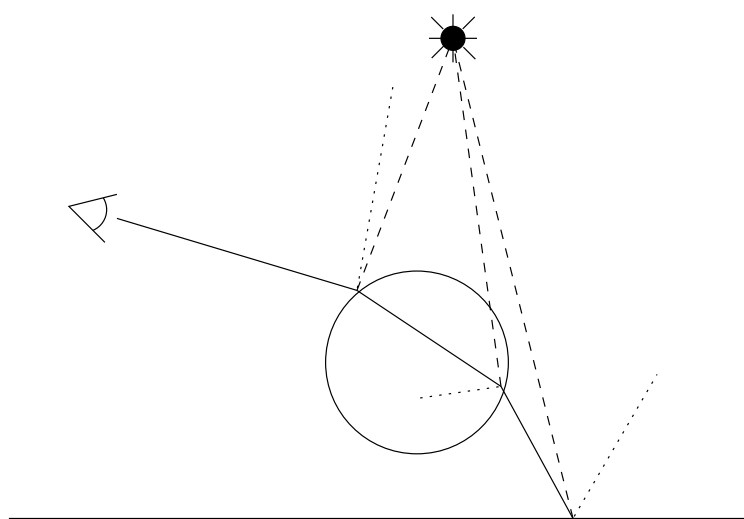
$$\begin{aligned} L(x \rightarrow \Theta_r) = & f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) L(x \leftarrow \Theta_i) \cos\theta_i + \\ & f_r(x, \Theta_l \leftrightarrow \Theta_r) L(x \leftarrow \Theta_l) \cos\theta_l + \\ & f_r(x, \Theta_t \leftrightarrow \Theta_r) L(x \leftarrow \Theta_t) \cos\theta_t \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdzie:

$\Theta_i$  – jest kierunkiem promienia odbitego

$\Theta_l$  – jest kierunkiem do źródła światła

$\Theta_t$  – jest kierunkiem promienia ugiętego



Rysunek 2.1: Metoda śledzenia promieni

### 2.1.2. Śledzenie ścieżek

Obrazy generowane za pomocą metody ray tracing są mało realistyczne. Brak spotykanych na co dzień efektów rozmytych cieni, w zamian występują niepożądane efekty aliasingu, a powierzchnie wyglądają nienaturalnie. Spowodowane jest to tym, że w naturze światło dobiega do punktu ze wszystkich stron i odbija się również we wszystkich kierunkach. Oczywiście niektóre kierunki odbicia są bardziej prawdopodobne niż inne, jednak idealne odbicie lustrzane zachodzi tylko dla niektórych materiałów.

Aby oddać te efekty, kolor zwracany przez promień powinien być obliczany przy uwzględnieniu całego światła jakie pada na dany punkt. Z powodów praktycznych nie jest możliwe dokładne obliczenie równania 2.1. Można jednak uzyskać dobre przybliżenie wyniku za pomocą metody Monte Carlo. Generuje się skończoną ilość przykładowych promieni, a następnie uśrednia wyniki. Metoda śledzenia promieni z zastosowaniem metod Monte Carlo nazywa się metodą **path tracing** [17] (metoda śledzenia ścieżek). Istnieje wiele podejść do implementacji metody Monte Carlo. W tej pracy zastosowano następujące podejście: dla każdego piksela obrazu generowana jest pewna ilość promieni, rozłożonych jednostajnie w obrębie powierzchni piksela. Przy przecięciu z obiektem losowane jest źródło światła, oraz losowany jest punkt na tym źródle, a następnie sprawdza się czy punkt przecięcia jest oświetlony bezpośrednio. Następnie sprawdza się czy nastąpi odbicie/ugięcie promienia. W tym celu wykorzystuje się tzw. **rosyjską ruletkę**. Każdy materiał ma cztery współczynniki –  $k_s, k_d, k_{ts}, k_{td}$  takie że

$k_s + k_d + k_{ts} + k_{td} \leq 1$ . opisują one odpowiednio prawdopodobieństwo odbicia lustrzanego, rozproszonego, ugięcia i ugięcia rozproszonego. Losowana jest liczba  $\xi \in [0, 1]$  z rozkładu jednostajnego. W zależności od wielkości liczby  $\xi$  kontynuuje się obliczenia dla promienia odbitego/ugiętego, lub kończy się rekursję:

|                                        |                                  | kierunek                         |
|----------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\xi \in [0$                           | $, k_s)$                         | $\Rightarrow$ odbity             |
| $\xi \in [k_s$                         | $, k_s + k_d)$                   | $\Rightarrow$ odbity rozproszony |
| $\xi \in [k_s + k_d$                   | $, k_s + k_d + k_{ts})$          | $\Rightarrow$ ugięty             |
| $\xi \in [k_s + k_d + k_{ts}$          | $, k_s + k_d + k_{ts} + k_{td})$ | $\Rightarrow$ ugięty rozproszony |
| $\xi \in [k_s + k_d + k_{ts} + k_{td}$ | $, 1]$                           | $\Rightarrow$ koniec rekursji    |

Jeśli rekursja jest kontynuowana, oblicza się kierunek promienia. Dla odbicia/ugięcia oblicza się kierunek idealnego odbicia/ugięcia zaburzony w niewielkim stopniu z rozkładem  $p(\Theta) = \frac{n+1}{2\pi} \cos^n \theta$ , gdzie  $n \in [0, 1]$  jest miarą „szorstkości” powierzchni, im gładsza powierzchnia tym mniejsze  $n$ ; dla wody wartość ta jest rzędu  $10^{-4}$ . Dla odbicia/ugięcia rozproszonego oblicza się kierunek z rozkładu  $p(\Theta) = \frac{\cos \theta}{\pi}$  [8]. Dla wybranego kierunku rekurencyjnie oblicza się kolor jaki ma światło z tego kierunku. Następnie, zgodnie z lokalnym modelem oświetlenia, oblicza się kolor jaki będzie miało światło zwracane w kierunku obserwatora. Przy rosnącej liczbie promieni można pokazać, że metoda Monte Carlo jest zbieżna do rozwiązania dokładnego.

Równanie oświetlenia przybiera w tym przypadku następującą postać:

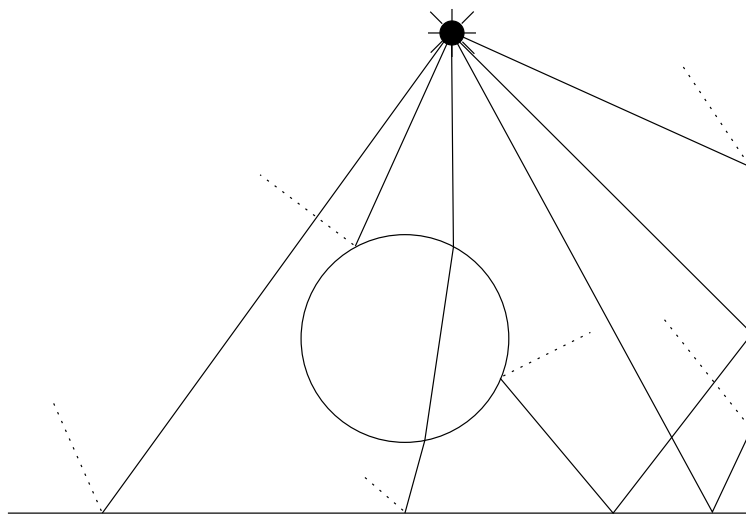
$$L(x \rightarrow \Theta_r) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_r} \frac{f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) L(x \leftarrow \Theta_i) \cos \theta_i}{p_r(\Theta)} \quad (2.3)$$

gdzie  $k_r$  jest właściwym współczynnikiem spośród  $k_s, k_d, k_{ts}, k_{td}$  dla danej próbki, np. dla odbicia będzie to  $k_s$ , a  $p_r(\Theta)$  jest odpowiadającym rozkładem.

## 2.2. Metoda mapy fotonów

Kiedy światło prześwieca przez przezroczyste obiekty, takie jak szklany kieliszek, czy powierzchnia wody, ulega ono załamaniu. Kąt załamывanego światła zależy od kształtu przezroczystego obiektu, tak więc rozkład strumienia światła po przejściu przez obiekt nie jest jednorodny. Pewne miejsca są oświetlone silniej niż inne. Efekty te zwane są **kaustykami**. Skrajnym przypadkiem kaustyk jest skupienie wiązki światła w jeden punkt za pomocą soczewki. Efekty te mogą być wymodelowane za pomocą metody path tracing, jednak wymaga to olbrzymiej ilości przykładowych promieni, a co za tym idzie dużego czasu obliczeń.

W celu przyspieszenia obliczeń Jensen [9] zaproponował nowy globalny model oświetlenia – **photon mapping** (metoda mapy fotonów). Metoda ta polega na tym, iż źródła światła generują fotony, które przechodzą przez scenę podobnie jak w metodzie path tracing. Miejsca interakcji fotonów z obiektami sceny są zapamiętywane. Następnie używając jednej z metod renderowania sceny można wykorzystać zapamiętane informacje uzyskując efekty kaustyk i miękkich cieni. W tej pracy metoda map fotonów została połączona z metodą śledzenia ścieżek.



Rysunek 2.2: Metoda mapowania fotonów

Liczba fotonów generowanych przez źródła światła jest ograniczona. Prawdopodobieństwo, że promień przebiegający scenę trafi w zapamiętany foton, jest skrajnie niskie. Dlatego w celu obliczenia oświetlenia otrzymanego dzięki metodzie mapowania fotonów należy uwzględnić gęstość fotonów leżących w bezpośrednim sąsiedztwie od badanego punktu. Ilość fotonów leżących w bliskiej odległości od punktu  $x$ , wyznacza strumień światła  $\Phi$  jaki pada na powierzchnię w otoczeniu punktu  $x$ . Znając strumień światła można policzyć radiancję zgodnie z definicją:

$$L(x \leftarrow \Theta_r) = \frac{d^2\Phi(x, \Theta_i)}{\cos\theta_i dA d\Theta_i} \quad (2.4)$$

gdzie  $A$  jest powierzchnią z której zbiera się fotony.

Równanie oświetlenia przybiera w tym przypadku następującą formę:

$$\begin{aligned} L(x \rightarrow \Theta_r) &= \int_{\Omega} f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) \frac{d^2\Phi(x, \Theta_i)}{\cos\theta_i dA d\Theta_i} \cos\theta_i d\Theta_i \\ &= \int_{\Omega} f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) \frac{d^2\Phi(x, \Theta_i)}{dA} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Strumień  $\Phi$  przybliża się używając mapy fotonów znajdując  $n$  fotonów najbliższych  $x$ . Każdy foton  $p$  ma kolor  $\Delta\Phi_p(\Theta_i)$ . Zakładając że foton ten przecina interesującą nas powierzchnię w okolicy  $x$  otrzymujemy:

$$L(x \leftarrow \Theta_r) \approx \sum_{p=1}^n f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) \frac{\Delta\Phi_p(x, \Theta_i)}{\Delta A} \quad (2.6)$$

Fotony najczęściej zbiera się ze sfery leżącej dookoła interesującego nas punktu, tak więc

$$\Delta A = \pi r^2 \quad (2.7)$$

gdzie  $r$  jest odległością pomiędzy  $x$  a najdalszym fotonem używanym w obliczeniach. Tak więc otrzymuje się równanie:

$$L(x \leftarrow \Theta_r) \approx \frac{1}{\pi r^2} \sum_{p=1}^n f_r(x, \Theta_i \leftrightarrow \Theta_r) \Delta \Phi_p(x, \Theta_i) \quad (2.8)$$

Trzeba przy tym zadbać, aby fotony zbierane z przeciwnej strony obiektu nie były uwzględniane (chyba że obiekt jest przezroczysty). Dodatkowo, jeśli interesujący nas punkt położony jest blisko innego obiektu, to fotony leżące na drugim obiekcie mogą być uwzględnione przy liczeniu strumienia padającego na pierwszy obiekt. Powoduje to efekt nienaturalnego rozjaśnienia krawędzi obiektów. Problem ten można rozwiązać filtrując fotony (np. zmniejszając ich moc im dalej od punktu  $x$ ), albo spłaszczając sferę przeszukiwań w kierunku normalnej, uzyskując płaską elipsoidę. Zapewnia to zbieranie fotonów tylko z obiektu na którym znajduje się interesujący nas punkt (o ile powierzchnia tego obiektu jest płaska). Niestety znacząco zwiększa to czas obliczeń.

### 2.2.1. Struktura danych

Przy używaniu map fotonów często wykonywaną operacją jest wyszukiwanie map fotonów. Z tego powodu operacja ta powinna być wykonywana jak najszybciej. Jensen [9] zaproponował, aby w celu zapamiętywania fotonów używać struktury zwanej kd-drzewo [11, 12, 13]. Jest to wielowymiarowe drzewo przeszukiwań binarnych, którego każdy węzeł jest używany do podziału jednego z wymiarów. Mapa fotonów jest trójwymiarowym zbiorem, więc używane jest trójwymiarowe kd-drzewo. Każdy węzeł zawiera jeden foton i wskaźniki na lewe i prawe poddrzewa. Każdy węzeł z wyjątkiem liści reprezentuje płaszczyznę prostopadłą do jednej z osi układu współrzędnych która zawiera foton i tnie jeden z wymiarów na dwie części. Wszystkie fotony w jednym poddrzewie leżą po jednej stronie dzielącej płaszczyzny, a fotony z drugiego poddrzewa leżą po drugiej stronie. Możliwe jest wyszukanie pojedynczego fotonu w kd-drzewie z  $n$  fotonami w średnim czasie  $O(\log n)$ . Pesymistyczny czas wynosi  $O(n)$ , ale jeśli drzewo jest zbalansowane, to najgorszy czas również wynosi  $O(\log n)$ . Pokazano również, że czas wyszukania  $k$  najbliższych sąsiadów jest rzędu  $O(k + \log n)$  [12].

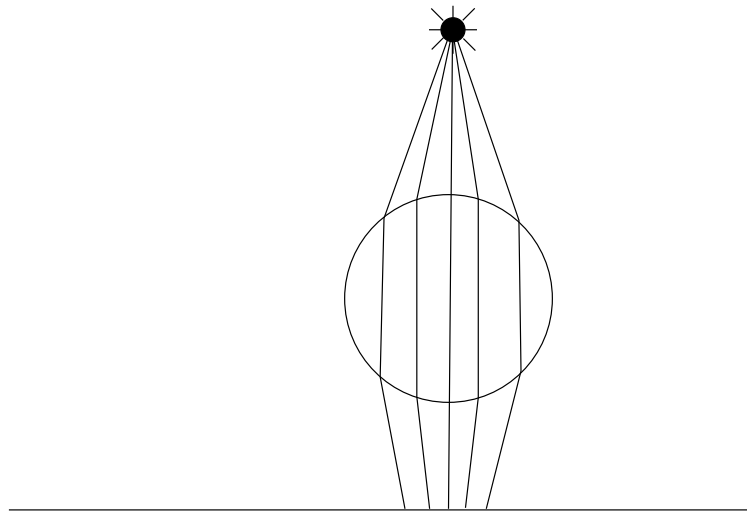
Drzewo daje się zbalansować w czasie  $O(n \log n)$ . Procedura polega na znalezieniu mediany w zbiorze fotonów, podziału przestrzeni, a następnie rekurencyjnego powtórzenia operacji dla otrzymanych podzbiorów.

kd-drzewo daje się zaimplementować w postaci kopca [14]. Pozwala to na oszczędność pamięci, ponieważ nie używa się wskaźników.

### 2.2.2. Efekty kaustyczne

Jednym z celów stosowania map fotonów jest wizualizacja kaustyk. Jeśli jednak będziemy rozsiewać fotony równomiernie po całej scenie, to najprawdopodobniej niewiele z nich przejdzie przez obiekty przezroczyste. Aby zwiększyć efektywność tej metody generuje się dodatkowe fotony od źródeł światła które kierowane są bezpośrednio na obiekty kaustyczne. Fotonów tych generuje się zwykle znacząco więcej (np. o jeden

rzęd więcej) niż fotonów rozsiewanych równomiernie po całej scenie. Nowe fotony zapamiętywane są w oddzielnej mapie fotonów. Do obliczeń oświetlenia lokalnego dochodzi więc nowy człon odpowiedzialny za obliczanie oświetlenia kaustycznego.



Rysunek 2.3: Mapa fotonów kaustycznych

### 2.2.3. Efekty wolumetryczne

Za pomocą map fotonów da się również modelować zjawiska absorpcji i rozpraszania wewnątrz obiektów. Kiedy foton przechodzi przez ośrodek może zajść interakcja między nim i ośrodkiem. Średni dystans jaki foton pokonuje pomiędzy interakcjami w ośrodku wynosi:

$$d = \frac{1}{\sigma_t} \quad (2.9)$$

gdzie:

$\sigma_t = \sigma_a + \sigma_s$  – jest współczynnikiem ekstynkcji, charakterystycznym dla danego ośrodka

$\sigma_a$  – jest współczynnikiem absorpcji tego ośrodka

$\sigma_s$  – jest współczynnikiem rozpraszania tego ośrodka.

Aby modelować zachowanie fotonu w ośrodku oblicza się dystans jaki przebywa on wewnątrz ośrodka:

$$d = \frac{\log \xi}{\sigma_t} \quad (2.10)$$

gdzie  $\xi \in [0, 1]$  jest liczbą z rozkładu jednostajnego. Jeśli obliczona odległość jest większa niż droga fotonu do wyjścia z ośrodka, to zakłada się że nie zaszło zdarzenie pomiędzy fotonem a ośrodkiem. W przeciwnym wypadku w punkcie w którym zachodzi interakcja może nastąpić rozproszenie fotonu, albo jego absorpcja. Prawdopodobieństwo rozproszenia dane jest przez albedo:

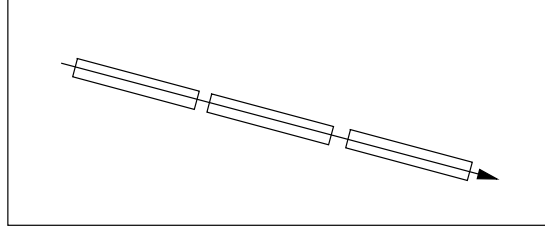
$$\Lambda = \frac{\sigma_s}{\sigma_t} \quad (2.11)$$

Aby sprawdzić które ze zdarzeń będzie rozpatrywane stosuje się rosyjską ruletkę. Losowana jest liczba  $\xi \in [0, 1]$  z rozkładu jednostajnego. Następnie porównuje się liczbę  $\xi$  z albedo  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} \xi \leq \Lambda & \text{ foton zostanie rozproszony} \\ \xi > \Lambda & \text{ foton zostanie zaabsorbowany} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Jeśli foton zostanie rozproszony, to losowany jest dla niego nowy kierunek zgodnie z funkcją fazową, a następnie kontynuuje się śledzenie fotonu, tak jakby punkt rozproszenia był nowym źródłem światła. Miejsce każdej interakcji fotonu z ośrodkiem (zarówno absorpcji jak i rozproszenia) jest umieszczane w **wolumetrycznej mapie fotonów**. Jest to kolejna mapa fotonów, taka jak kaustyczna, czy ogólna, w tej jednak fotony nie leżą na powierzchniach obiektów, lecz są punktami umieszczonymi wewnątrz obiektów.

Podczas modelowania ośrodków przezroczystych należy wziąć pod uwagę, iż światło ulega w nich rozproszeniu. Intensywność strumienia światła przechodzącego przez ośrodek na dystansie  $s$  zmniejszana jest o  $e^{-\sigma_t s}$ . W zamian światło zostaje wzmocnione dzięki rozproszeniom z innych kierunków. Aby zamodelować to zjawisko stosuje się technikę zwaną **ray marching**. Promień światła biegnący przez ośrodek dzielony jest na mniejsze odcinki długości  $\Delta x$ . Zakłada się przy tym że na tym odcinku własności medium są homogeniczne. Dla każdego z segmentów wybiera się jeden punkt  $x$ , najczęściej środkowy. Sprawdza się wzajemną widoczność ze źródłami światła, jednak powierzchnie przezroczyste są w tym przypadku ignorowane. To tylko przybliżenie zachodzących zjawisk, a nie w pełni fizyczne modelowanie, jednak wystarczające do oddania sytuacji. Część bezpośredniego oświetlenia ze źródła światła jest rozpraszana w kierunku obserwatora  $\Theta$  zgodnie z rozkładem funkcji fazowej.



Rysunek 2.4: Ray marching

$$L(x \rightarrow \Theta) = L(\Theta_i \rightarrow x) + \sum_{l=1}^N L(x \leftarrow \Theta_l) p(x, \Theta_l, \Theta) \sigma_s \Delta x \quad (2.13)$$

gdzie  $N$  jest ilością źródeł światła,  $\Theta_i$  jest kierunkiem przeciwnym do  $\Theta$ , a  $\Theta_l$  kierunkiem od punktu  $x$  do  $l$ -tego źródła światła.

Dodatkowo z punktu  $x$  generowane są kolejne promienie w różnych kierunkach. Część światła które przychodzi z tych kierunków również zostanie rozpraszona w kierunku obserwatora.

$$L(x \rightarrow \Theta) = L(\Theta_i \rightarrow x) + \left\{ \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S L(x \leftarrow \Theta_s) p(x, \Theta_s, \Theta) \right\} \sigma_s \Delta x \quad (2.14)$$

gdzie  $S$  jest ilością wygenerowanych promieni rozproszonych, a  $\Theta_s$  kierunkiem  $s$ -tego promienia.

Oblicza się również strumień światła jaki dochodzi do otoczenia punktu  $x$ , wykorzystując w tym celu wolumetryczną mapę fotonów.

$$L(x \leftarrow \Theta) = \frac{d^2\Psi(x, \Theta)}{\sigma_s dV d\Theta} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} L(x \rightarrow \Theta) &= \sigma_s \int_{\Omega_{4\pi}} p(x, \Theta_i, \Theta) \frac{d^2\Psi(x, \Theta)}{\sigma_s dV d\Theta} d\Theta \\ &= \int_{\Omega_{4\pi}} p(x, \Theta_i, \Theta) \frac{d^2\Psi(x, \Theta)}{dV} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Następnie powtarza się obliczenia dla kolejnego odcinka, a uzyskane obliczenia są podstawą do kolejnych. Ponieważ jednak światło przebyło drogę równą  $\Delta x$ , ulega ono osłabieniu:

$$L_{n+1}(x + \Delta x \leftarrow x) = e^{-\sigma_t \Delta x} L_n(x \rightarrow \Theta) \quad (2.17)$$

## 2.3. Powierzchnia wody

Efekty świetlne widoczne na dnie zbiorników wodnych są efektem przejścia światła przez dynamicznie zmieniającą się powierzchnię wody. Tak więc, aby modelować zachowanie się światła pod wodą, należy również modelować jej powierzchnię. Istnieje kilka podejść do tego problemu, np. matematyczne przybliżenie kształtów fal za pomocą prostych funkcji, czy modelowanie własności fizycznych wody przy użyciu skomplikowanych równań Navier’a-Stokes’a. W tej pracy wykorzystany został model statystyczny opisany m.in. przez Tessendorf’a [10]. Model ten nie jest oparty na fizycznych podstawach, w zamian używa statystycznych obserwacji morza.

Kiedy do pewnej powierzchni zastosuje się Transformatę Fourier’a (FT), otrzyma się jej charakterystyczne widmo. Po zastosowaniu odwrotnej transformacji otrzymuje się powierzchnię wyjściową. Idea metody statystycznej polega na wygenerowaniu odpowiedniego widma, a następnie poprzez zastosowanie FT otrzymaniu realistycznej powierzchni wody. W celu szybkiego i efektywnego liczenia transformaty używana jest szybka transformata Fourier’a (FFT) [15].

Tessendorf [10] proponuje użycie widma Philipsa do widma fal powstałych na skutek wiatru. Widmo to definiowane jest następującym równaniem:

$$P_h(K) = a \frac{e^{-1/(kl)^2}}{k^4} |\widehat{K} \cdot \widehat{W}|^2 \quad (2.18)$$

Po obliczeniu widma należy obliczyć amplitudy i fazy fal w chwili początkowej. Obliczenia te wykorzystują następujące równanie:

$$\tilde{h}_0(K) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\xi_r + i\xi_i) \sqrt{P_h(K)} \quad (2.19)$$

|                                         |                                                                                                                                              |
|-----------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l = v^2/g$                             | największa możliwa fala powstała przy ciągłym wietrze o prędkości $v$ , $g$ jest przyspieszeniem ziemskim                                    |
| $\widehat{W}$                           | kierunek wiatru                                                                                                                              |
| $\widehat{K}$                           | kierunek fali                                                                                                                                |
| $X$                                     | horyzontalna pozycja punktu w którym liczymy wysokość                                                                                        |
| $a$                                     | pewna stała dobierana eksperymentalnie, oddziałująca na wszystkie fale                                                                       |
| $k = 2\pi/\lambda$                      | amplituda fali zależna od długości fali $\lambda$                                                                                            |
| $K = (k_x, k_z) = (2\pi n/s, 2\pi m/s)$ | dwuwymiarowy wektor, gdzie $s$ jest wielkością pola, $r$ rozdzielczością siatki, a $n$ i $m$ wyznaczają punkty siatki $-r/2 \leq n, m < r/2$ |
| $\xi_r$ i $\xi_i$                       | zmienne losowe z rozkładu normalnego o wartości średniej równej 0 i odchyleniu standardowym równym 1                                         |
| $*$                                     | operator sprzężenia                                                                                                                          |

Rysunek 2.5: Wielkości używane przy obliczaniu powierzchni wody

Następnie, mając czas  $t$ , liczone jest pole amplitud częstotliwości:

$$\tilde{h}(K, t) = \tilde{h}_0(K)e^{i\omega(K)t} + \tilde{h}_0^*(-K)e^{-i\omega(K)t} \quad (2.20)$$

gdzie  $\omega$  – jest kątową częstotliwością fali  $k$ , reprezentującą prędkość z jaką fala porusza się po powierzchni. Można policzyć ją z równania:

$$\omega^2(K) = g|K| \quad (2.21)$$

gdzie  $|K|$  jest długością wektora  $K$ . Dla płytkich wód można wziąć pod uwagę głębokość  $d$ :

$$\omega^2(K) = g|K| \tanh(kd) \quad (2.22)$$

Tak przygotowane pole zostaje następnie zamienione na mapę wysokości odpowiadającą powierzchni wody. Używa się w tym celu FFT, aby szybko obliczyć następującą sumę:

$$h(X, t) = \sum_K \tilde{h}(K, t)e^{iK \cdot X} \quad (2.23)$$

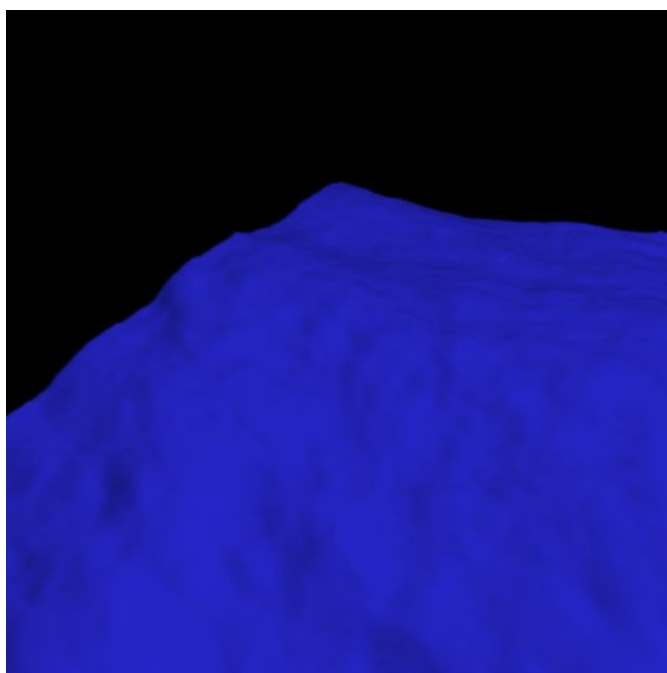
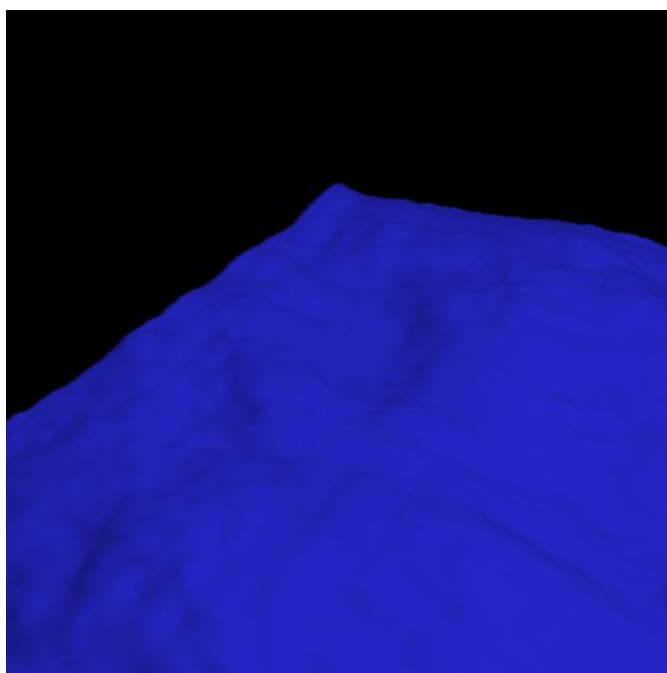
Wszystkie obliczenia wykonywane są na liczbach zespolonych, jako wynikową wysokość bierze się jednak tylko część rzeczywistą sumy.

Zaletą tej metody jest to, że można wyznaczyć wektory normalnych w punktach siatki używając kolejny raz FFT:

$$\nabla h(X, t) = \sum_K iK \tilde{h}(K, t)e^{iK \cdot X} \quad (2.24)$$

Używając tej metody można łatwo otrzymać realistyczną animację powierzchni wody. Została ona wykorzystana komercyjnie przy produkcji takich filmów jak „Titanic”, czy „Waterworld”.

Poniżej przedstawiono obrazy przedstawiające mapy wysokości powierzchni wody. Uwaga: z powodu utraty jakości podczas drukowania obrazy te wyglądają lepiej w wersji elektronicznej.



Rysunek 2.6: Wyrenderowana powierzchnia wody

# Rozdział 3

## Podsumowanie

### 3.1. Wyniki

Efekt zastosowania map fotonów widać na zamieszczonych poniżej obrazkach. Otrzymane kaustyki są zbliżone do naturalnych (rys. 3.4). Uwaga: z powodu utraty jakości podczas drukowania obrazy te wyglądają lepiej w wersji elektronicznej.

Przebieg programu wygląda następująco:

Ustalany jest sposób patrzenia na scenę. Podczas ewentualnej animacji kamera nie porusza się, dlatego ten element programu został wyłączony przed pętlą animacji.

Wykonywana jest pętla wykonywania kolejnych klatek animacji. Wewnątrz pętli generowana jest scena właściwa dla danej klatki filmu, generuje się fotony które przebiegają scenę i są zapamiętywane w mapach fotonów. Następnie generuje się obraz, który jest na końcu zapisywany do pliku.

Generacja obrazu dokonuje się metodą śledzenia ścieżek (patrz 2.1.2) i wygląda następująco:

Dla każdego piksela obrazu generuje się predefiniowaną ilość ścieżek które wychodzą z punktu położenia kamery i przechodzą przez ten piksel. Dla każdej ścieżki oblicza się punkt przecięcia ze sceną, oraz oblicza kolor jaki widzi obserwator z tego kierunku. Kolory które zostały zwrócone uśrednia się dla pojedynczego piksela, a wynik jest zapamiętywany.

Kolor oblicza się następująco:

Sprawdza się czy obiekt z którym nastąpiło przecięcie z promieniem jest oświetlony przez losowo wybrane źródło światła w punkcie przecięcia. Jeśli obiekt jest oświetlony, to używany jest lokalny model oświetlenia właściwy dla materiału skojarzonego z obiektem w celu wyznaczenia koloru jaki dociera do obserwatora.

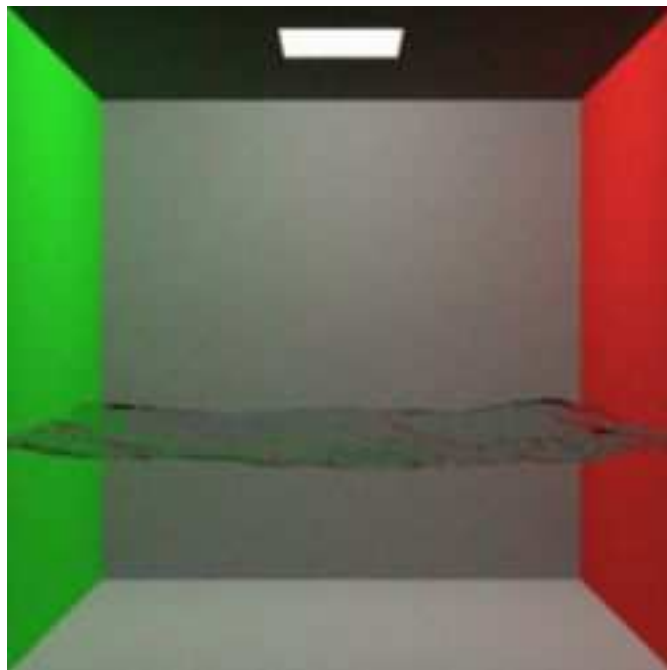
Następnie dokonuje się estymacji radiancji z map fotonów (wzór 2.8) (normalnej i kaustycznej; ze względu na olbrzymi przyrost obliczeń i niezauważalne efekty zrezygnowano w tej pracy z map wolumetrycznych).

W kolejnym kroku dokonuje się rosyjskiej ruletki (patrz 2.1.2) w celu stwierdzenia czy następuje odbicie/ugięcie promienia i jeśli tak to rekursywnie oblicza się kolor z odbitego/ugiętego kierunku.

Otrzymane kolory są sumowane i zwracane jako kolor wynikowy.

Zastosowany algorytm metody map fotonów jest niestety kosztowny obliczeniowo. Tabela poniżej przedstawia porównanie czasów generowania prostej sceny zawierającej powierzchnię wody z użyciem map fotonów i bez. Scena zawiera 130062 trójkątów. Rozdzielczość obrazu wynosi 500 na 500 pikseli, dla każdego piksela wygenerowano 100 ścieżek. Obliczenia wykonano na maszynie z procesorem Athlon XP 1600+ (1750MHz), 512 pamięci RAM, na systemie operacyjnym Linux Mandriva LE 2005. Wygenerowane sceny widać na obrazach poniżej.

| Metoda                                                       | Czas renderowania |
|--------------------------------------------------------------|-------------------|
| Śledzenie ścieżek                                            | średnio 20 min    |
| Śledzenie ścieżek + mapy fotonów (około 2.2 miliona fotonów) | średnio 23 h      |



Rysunek 3.1: Scena wyrenderowana za pomocą metody śledzenia ścieżek

## 3.2. Opis implementacji

Do implementacji symulacji wykorzystany został algorytm śledzenia ścieżek, wsparty metodą map fotonów.

Jądrzem projektu jest klasa **RayTracer**. Wewnątrz tej klasy wykonuje się główna pętla programu wykonująca obliczenia. Klasa ta również zapisuje wygenerowany obraz w formacie PPM.

Klasa **Scene** zawiera listę obiektów obecnych w obrazowanej przestrzeni.

Klasa **Camera** odpowiada za ustawienie kamery w stosunku do sceny.

Za symulowany promień światła odpowiada klasa **Ray**. Wszelkie interakcje obiektów ze światłem odbywają się przy użyciu tej klasy.

Abstrakcyjna klasa **Primitive** zawiera parametry które musi posiadać każdy obiekt obecny na scenie. Wszystkie obiekty dziedziczą po tej klasie. Przykładem jest klasa **Triangle** opisująca trójkąt.

Za kształt powierzchni wody odpowiedzialna jest klasa **StatisticalWater**. Klasa ta jest napisana w oparciu o implementację Gottfrieda Chena. Wykorzystuje ona szybką transformatę Fouriera (klasa **Fft2D**) do wygenerowania mapy wysokości (klasa **HeightMap**) powierzchni wody. Na podstawie tej mapy generowana jest lista trójkątów odwzorowująca powierzchnię wody. Z powodu dużej liczby trójkątów składających się na tą listę upakowywane one są do struktury zwanej Quad Tree (klasa **QuadTree**). Dzieli ona przestrzeń zajmowaną przez trójkąty na 4 części, następnie każda z podprzestrzeni jest rekurencyjnie dzielona na mniejsze części, aż w każdej pozostaje nie więcej niż ustalona liczba obiektów. Pozwala to na znaczne przyspieszenie wyszukiwania przecięć promienia z obiektami.

Abstrakcyjna klasa **Material** opisuje kolor obiektu, oraz własności fizyczne jakie posiada dany obiekt. Po tej klasie dziedziczy klasa **Lambertian**, opisująca powierzchnię lambertowską (idealnie rozpraszającą światło). Dziedziczy po niej także klasa **Cook-TorranceMaterial**, wykorzystywana w tej implementacji do opisu powierzchni wody. Materiał opisujący źródło światła (klasa **Light**) również dziedziczy po klasie **Material**.

Scena renderowana w tej pracy zbudowana jest z pięciu ścian (każda składa się z dwóch trójkątów), o powierzchniach lambertowskich. Poza tym na scenie jest źródło światła (dwa trójkąty), o powierzchni źródła światła. Scena zawiera również powierzchnię wody (zbiór trójkątów generowany za pomocą klasy **StatisticalWater**). Powierzchnia wody jest opisywana przez model Cook'a-Torrance'a. Scena konstruowana jest wewnątrz klasy **Scene**.

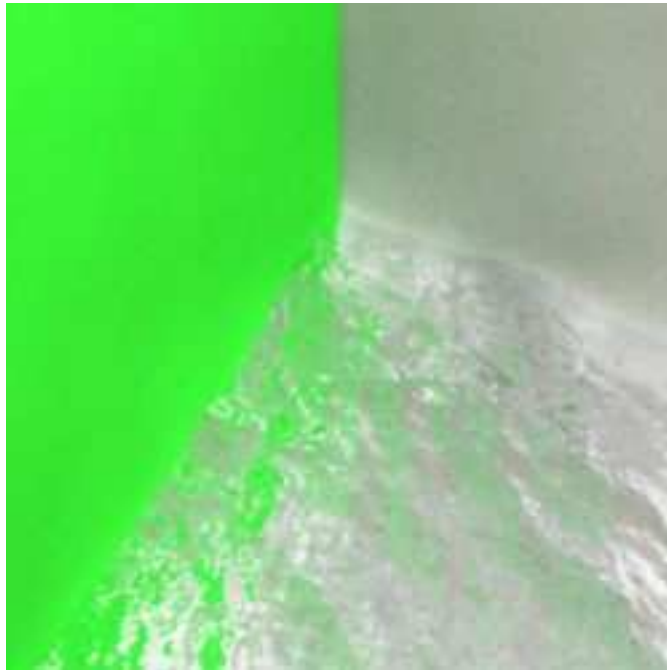
Sposób patrzenia na scenę (rozdzielczość wynikowego obrazu, punkt z którego obserwuje się scenę, kierunek i kąty patrzenia) jest opisuje klasa **Camera**. Klasa **Photon** opisuje parametry fotonu. Fotony gromadzone są w mapie fotonów (klasa **PhotonMap**).

W funkcji uruchamiającej program (funkcja **main** w pliku **rt.cpp**) znajduje się pętla dzięki której można tworzyć animacje ruszającej się wody.

W pliku **defs.h** znajdują się makroinstrukcje sterujące zachowaniem programu. Można dzięki nim ustawiać takie parametry jak rozdzielczość wynikowego obrazu, jakość próbkowania sceny, włączać/wyłączać i ustawiać parametry mapowania fotonów, oraz kilka innych.



Rysunek 3.2: Sceny wyrenderowane za pomocą metody śledzenia ścieżek i metody mapowania fotonów (około 2.2 milionów fotonów)



Rysunek 3.3: Scena widziana pod innym kątem



Rysunek 3.4: Rzeczywista scena podwodna

## Dodatek – płyta CD

Zawartość płyty CD:

W katalogu src/ znajdują się źródła programu.

W katalogu bin/ znajduje się skompilowany program gotowy do uruchomienia.

W katalogu pic/ znajdują się przykładowe obrazy i animacje wygenerowane za pomocą programu stworzonego na potrzeby tej pracy.

W katalogu doc/ znajduje się treść pracy w formacie PDF.

# Bibliografia

- [1] F.E. Nicodemus: *Reflectance nomenclature and directional reflectance and emissivity*, Applied Optics. Vol. 9(6). pp.1474-1475, June 1970
- [2] Sz. Szczeniowski: *Fizyka doświadczalna. Część IV. Optyka.*, PWN, Warszawa 1983
- [3] B.Jaworski, A. Dietłaf: *Kurs fizyki. Tom III. Procesy falowe. Optyka. Fizyka atomowa i jądrowa.*, PWN, Warszawa 1979
- [4] L.G. Heyney, J.L. Greenstein: *Diffuse radiation in the galaxy.*, Astrophysics Journal, 93: 70-83, 1941
- [5] Phong Bui-Tong: *Illumination for computer generated pictures.*, Communications of the ACM, 18(6):311-317, June 1975
- [6] R. Cook, K. Torrance: *A reflectance model for computer graphics.*, ACM Transaction on Graphics, 1(1):7-24, January 1982
- [7] Kajiya, James T.: *The Rendering Equation*, In the Proceedings of SIGGRAPH, 1986
- [8] Philip Dutré: *Global illumination compendium.*, Dostępne w sieci, URL <http://www.graphics.cornell.edu/~phil/GI/> , 2001
- [9] Henrik Wann Jensen: *Realistic image synthesis using photon mapping.*, A K Peters, 2001
- [10] Jerry Tessendorf: *em Simulating ocean water. Simulating Nature: Realistic and Interactive Techniques. SIGGRAPH 2001 Course Notes 47.*
- [11] Jon L. Bentley: *Multidimensional binary search trees used for associative searching.*, Communications of the ACM 18(9): 509-517 (1975)
- [12] Jon L. Bentley: *Multidimensional binary search trees in database applications.*, IEEE Trans. on Soft. Eng. 5(4): 333-340 (July 1979)
- [13] Jon L. Bentley, Jerome H. Friedman: *Data structures for range searching.* Computing Surveys 11(4): 397-409 (1979)
- [14] Thomas H. Cormen, Charles E. Leieronson, Ronald L. Rivest: *Wprowadzenie do algorytmów.* WNT, Warszawa 1997

- [15] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery: *Numerical recipes in C. The art of scientific computing.*, Second edition. Cambridge University Press 1992
- [16] T. Whitted: *An improved illumination model for shaded display.*, Communications of the ACM 23(6):343-349 (June 1980)
- [17] R.L. Cook, T. Porter, L. Carpenter: *Distributed ray tracing.*, Comput. Graph. (Siggraph '84 proceedings) 18(3), 137-145, July 1984
- [18] E. S. Mihajlović: *Metoda Monte Carlo i zagadnienia pokrewne*, PWN, Warszawa 1976
- [19] Åke Björck, Germund Dahlquist: *Metody numeryczne*, PWN, Warszawa 1987