# Matematyka dyskretna – zadania na ćwiczenia 2

**Licencjat dzienny. Prowadzący: Maciej M. Sysło**

**1.** Przedstaw NWD(448, 721) w postaci $448x + 721y$, czyli znajdź odpowiednie wartości liczb całkowitych $x$ i $y$.

**2.** (*Zadanie domowe, rozwiązanie proszę przynieść na ćwiczenia.*) Zapisz w wybranym przez siebie języku programowania i sprawdź na komputerze algorytm, który dla trzech danych liczb naturalnych $a$, $b$ i $k$ (gdzie liczba $k$ = NWD($a$, $b$)) znajduje liczby całkowite $x$ i $y$ spełniające równanie: $ax + by = k$. Określ złożoność swojego algorytmu. Rozważ modyfikację podanego algorytmu, w której liczba $k$ jest podzielna przez NWD($a$, $b$).

**3. a.** Wykaż, że $F_{2n} = F_n(F_n + 2\,F_{n-1})$

**b.** Podaj podobną zależność dla $F_{2n+1}$ zawierającą liczby Fibonacciego o mniejszych wskaźnikach.

**4.** Korzystając z wyników poprzedniego zadania, zaproponuj algorytm wyznaczania wartości $F_n$. Oblicz liczbę wykonanych mnożeń i dodawań w zależności od $n$ (patrz [4]).

**5.** Wykaż, że dwie kolejne liczby Fibonacciego są względnie pierwsze.

*Wskazówka*. Skorzystaj z algorytmu Euklidesa.

**6.** Udowodnij indukcyjnie, że NWD($F_m$, $F_n$) = $F_{\mathrm{NWD}(m, n)}$.

**7*.** Jaki związek z liczbami Fibonacciego ma rozwiązanie następującego zadania: W skończonym ciągu dodatnich liczb całkowitych, nie większych niż miliard (to może być 10 miliardów, albo inna liczba), reprezentujących długości odcinków, należy znaleźć trzy takie liczby, że z odpowiadających im odcinków można zbudować trójkąt (źródło: *Materiały II Olimpiady Informatycznej*, 1994/1995).

**8.** Udowodnij, że jeśli $(m_1, m_2, ...)_p$ i $(n_1, n_2, ...)_p$ są reprezentacjami liczb naturalnych $m$ i $n$ względem układu kolejnych liczb pierwszych, to:

**a.** $k$ = NWD($m$, $n$) iff $k_i = \min\{m_i, n_i\}$ dla każdego $i$ = 1, 2, ...

**b.** $k$ = NWW($m$, $n$) iff $k_i = \max\{m_i, n_i\}$ dla każdego $i$ = 1, 2, ...

gdzie $(k_1, k_2, ...)_p$ jest rozkładem liczby $k$. Korzystając z powyższych równości pokaż, że $mn$ = NWD($m$,$n$)NWW($m$,$n$).

**9.** Wykaż, że jeśli $2^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $n$ jest liczbą pierwszą (por. liczby Mersenne'a).

**10.** Wykaż, że jeśli $a^n - 1$ jest liczbą pierwszą, to $a$ = 2 (por. liczby Mersenne'a).

**11.** Wykaż, że jeśli $2^n + 1$ jest liczbą pierwszą, to $n$ jest potęgą liczby 2 (por. liczby Fermata).

### *Zalecana literatura do wykładu, repetytorium i ćwiczeń:*


**1.** R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

**2.** K.A. Ross, C.R.B. Wright, *Matematyka dyskretna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

**3.** M.M. Sysło, *Algorytmy*, WSiP, Warszawa 1997.

**4.** M.M. Sysło, *Piramidy, szyszki i inne konstrukcje algorytmiczne*, WSiP, Warszawa 1998.