

REPETYTORIUM Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ

LISTA 4

Zadanie 1. Rozważmy błądzenie losowe po prostej, w każdej chwili czasu punkt może przesunąć się w prawo z prawdopodobieństwem p lub w lewo z prawdopodobieństwem $1 - p$. Korzystając z wyników oraz technik z repetytorium (funkcje tworzące prawdopodobieństwa), wyraż prawdopodobieństwo dotarcia do punktu k z punktu 0 w czasie t oraz oczekiwany czas pierwszego dotarcia do tego punktu.

Zadanie 2. [Modyfikacja zadania Banacha]

Matematyk jest (niestety) palaczem. W kieszeniach (lewej i prawej) ma l oraz p zapalek. Za każdym razem, gdy zapala papierosa, sięga losowo do kieszeni. W końcu sięgnie do pustej kieszeni. Z jakim prawdopodobieństwem będzie to kieszeń lewa?

Modyfikacja: tym razem ma zapalniczki. Za każdym razem sięga losowo zapalniczkę i losowo też ją wkłada do kieszeni. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kiedyś sięgnie do lewej (prawej) kieszeni i nie znajdzie tam zapalniczki?

Zadanie 3. Pokaż, że następujące rozkłady mają własność braku pamięci, tj.

$$\mathbb{P}[X > t + s | X > s] = \mathbb{P}[X > t]$$

- rozkład wykładniczy z parametrem λ , tj. o gęstości

$$\rho(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{dla } x \geq 0 \\ 0 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

- rozkład geometryczny z parametrem p , tj.

$$\mathbb{P}[X = n] = p(1 - p)^{n-1}$$

Zadanie 4. Suma dwóch rozkładów Poissona jest rozkładem Poissona. Przypomnienie, rozkład z parametrem λ :

$$\mathbb{P}[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$