

REPETYTORIUM Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LISTA 3

Zadanie 1. W każdej chwili $t = 1, 2, \dots$ cząstka może z prawdopodobieństwem p zniknąć lub podzielić się na k nowych (identycznych) cząstek. Jaka jest oczekiwana liczba cząstek w chwili n ?

Zadanie 2. Pokaż, że $\mathbb{D}^2[X] = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy X jest stałe.

Zadanie 3. Wyraż wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej $aX + b$ (a, b — liczby rzeczywiste) przez odpowiednie funkcje zmiennej X .

Zadanie 4. [Paradoks Simpsona] Podać przykład A, B, C , takich że:

$$\mathbb{P}[A|B] < \mathbb{P}[A|B^c]$$

oraz

$$\mathbb{P}[A|B \cap C] \geq \mathbb{P}[A|B^c \cap C]$$

$$\mathbb{P}[A|B \cap C^c] \geq \mathbb{P}[A|B^c \cap C^c]$$

Lub też wyrażając słownie: we Wrocławiu jest większa umieralność na gruźlicę niż w Krakowie, ale umieralność mężczyzn jest mniejsza i umieralność kobiet jest mniejsza.

Zadanie 5. W mieście działają dwa przedsiębiorstwa taksówkowe: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15% samochodów). Świadek nocnego wypadku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty wykazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawnie w 80% przypadków i w 20% się myli. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?

Zadanie 6. Test na rzadką chorobę, którą dotknięta jest średnio jedna osoba na tysiąc, daje fałszywą odpowiedź w 5% przypadków (u osoby chorej zawsze daje odpowiedź pozytywną). Jaka jest szansa, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną, jest faktycznie chora?

Zadanie 7. [Dylemat Więźnia]

Naczelnik więzienia postanowił uwolnić jednego z trzech więźniów, o czym dowiedzieli się zainteresowani, ale nie dowiedzieli się, który z nich będzie wolny. Więzień A ma wśród strażników znajomego, który to wie. Chce go zapytać, ale krępuje się pytać o siebie. Pyta więc o imię jednego z więźniów (różnego od niego), który ma pozostać w więzieniu. Przed zadaniem pytania pyta o ocenę, że każdy z nich ma szansę wyjścia równą $1/3$. Myśli, że jeśli strażnik powie na przykład, że zostaje B, to jego szanse rosną do $1/2$ (bo zostanie uwolniony A lub C). Gdzie popełnia błąd?

Zadanie 8. Podobnie do dowodu na wykładzie pokaż, że jeśli g jest parzystą, niemalejącą na $[0, \infty)$, to dla $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}[|X| \geq \epsilon] \leq \frac{\mathbb{E}[g(X)]}{g(\epsilon)}$$

Zadanie 9. W popularnym w swoim czasie teleturnieju uczestnik wybierał jedną z trzech bramek. Za jedną z nich była nagroda, za dwoma pozostałymi nie było nic. Po wybraniu prowadzący odsłaniał jedną z dwóch niewybranych bramek, zawsze pustą. Wtedy uczestnik miał prawo zmienić swój wybór. Czy powinien to zrobić?

Zadanie 10. Zadanie trochę niedookreślone, za to może trochę praktyczne. Chcemy zbadać, czy auta po przerobieniu ich na "na gaz" są bardziej awaryjne niż bez tej zmiany. mamy dostęp do danych, jak wiele gazu i benzyny sprzedaje się w Polsce oraz dostęp do informacji, jaka część aut zgłaszanych do naprawy to auta przerobione na gaz (powiedzmy, że mamy zaprzyjaźnionego właściciela warsztatu). Dokonując pewnych uproszczeń, rozwiąż problem.