

REPETYTORIUM Z MATEMATYKI DYSKRETNEJ
LISTA 2

Druga lista. Z wartości oczekiwanej. Proszę zajrzeć również do zadań na stronie p. Przemki Kanarek (link na mojej stronie). Niektóre zadania mogą być trudne.

Zadanie 1. Udowodnij, że jeśli X, Y są niezależne, to

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

Zadanie 2. Pokaż, że

$$\mathbb{E}\left[\sum_i a_i X_i\right] = \sum_i a_i \mathbb{E}[X_i].$$

Zadanie 3. Dane jest p pudełek i k kulek. Niezależnie i jednostajnie wrzucamy kulki do pudełek. Jaka jest oczekiwana liczba pustych pudełek? A niepustych pudełek? Jaka jest oczekiwana liczba kulek będących w pudełku z 1. kulka? Czy gdzieś korzystamy z niezależności?

Zadanie 4. Losujemy niezależnie i jednostajnie n punktów ze zbioru $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, m\}$ (na płaszczyźnie). Mówimy, że punkt (x_1, y_1) dominuje punkt (x_2, y_2) , jeśli $x_1 > x_2$ oraz $y_1 > y_2$. Jaka jest oczekiwana ilość punktów zdominowanych? Liczony z krotnościami, tj. jeśli jeden punkt jest dominowany k różnych punktów to liczymy go k -krotnie.

Zadanie 5. Niech X ma tylko wartości naturalne. Udowodnij, że

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i>0} \mathbb{P}[X \geq i] = \sum_{i \geq 0} \mathbb{P}[X > i]$$

Zadanie 6. Rzucamy kostką tak długo, aż uzyskamy wszystkie oczka. Jaka jest oczekiwana ilość rzutów?

Zadanie 7. Dana jest losowa permutacja a_1, \dots, a_n liczb $1, \dots, n$. Budujemy z niej drzewo binarne, w i -tym kroku wstawiamy do drzewa liczbę a_i . Jaki jest pesymistyczny (oczekiwany) czas zbudowania drzewa?

Wskazówka: Rozważ zmienne losowe $\{X_{i,j}\}_{1 \leq i < j \leq n}$ liczące porównania a_i z a_j , tj.:

$$X_{i,j} = \begin{cases} 1 & , \text{jeśli } a_i \text{ zostało porównane z } a_j \text{ w czasie budowania drzewa} \\ 0 & , \text{jeśli } a_i \text{ nie zostało porównane z } a_j \text{ w czasie budowania drzewa} \end{cases}$$

następnie wyraż koszt zbudowania drzewa przez $X_{i,j}$ i skorzystaj z liniowości wartości oczekiwanej.