

Algebra — Lista 12

Zadanie 1 (Sprzężenie) Rozważmy grupę G i zdefiniujmy jej *sprzężenie*:

$$\varphi_g(x) = gxg^{-1}.$$

Pokaż, że

- $\varphi_{ab} = \varphi_a \varphi_b$;
- φ_a jest izomorfizmem z G w G .

Zadanie 2 W grupie obrotów kwadratu opisz warstwy (prawostronne i lewostronne) podgrupy generowanej przez obrót o 180^0 .

W grupie obrotów i symetrii kwadratu opisz warstwy (prawostronne i lewostronne) podgrupy generowanej przez

- obrót o 180^0 .
- obrót o 90^0 .
- symetrię wzdłuż przekątnej (wybierz dowolną).

Zadanie 3 Rozpatrzmy kwadraty, w których malujemy wierzchołki na biało lub czerwono. Dwa kwadraty uznajemy za identyczne, jeśli można je przekształcić na siebie przez obrót. Ile jest rozróżnialnych kwadratów mających

- 0
- 1
- 2
- 3
- 4

wierzchołków białych? Jak zmieni się odpowiedź, jeśli dopuścimy też symetrie kwadratu?

Wskazówka: Lemat Burnside'a.

Zadanie 4 Niech grupa G działa na zbiorze X . Rozpatrzmy dwa elementy X : x, y z tej samej orbity. Udowodnij, że zbiór elementów przekształcających x na y , tj.:

$$\{g : g(x) = y\}$$

jest

- warstwą lewostronną G_x w G ;
- warstwą prawostronną G_y w G .

Zadanie 5 Niech grupa G działa na zbiorze S . Przez G_s oznaczmy stabilizator elementu s , tj. $\{g \in G : g(s) = s\}$. Pokaż, że przecięcie wszystkich stabilizatorów $\bigcap_{s \in S} G_s$ jest podgrupą normalną w G .

(Na wykładzie powiedziałem, że G_s jest podgrupą normalną, co nie jest prawdą — przepraszam).

Zadanie 6 Znajdź wszystkie podgrupy normalne w grupie obrotów i odbić kwadratu. Dla najmniej licznej z nich podaj tabelę działań w grupie ilorazowej.

Zadanie 7 Załóżmy, że H jest podgrupą G , a N podgrupą normalną G . Pokaż, że wtedy

$$HN = \{hn : h \in H, n \in N\}$$

jest podgrupą G .

Zadanie 8 Załóżmy, że grupy N_1, N_2 są normalne w G . Pokaż, że $N_1 N_2$ jest podgrupą normalną. Możesz skorzystać z poprzedniego zadania, w którym pokazaliśmy, że jest to podgrupa.

Zadanie 9 Pokaż, że podgrupa $\{e, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \leq S_4$ jest podgrupą normalną. Wybierz dwie nietrywialne warstwy i wymnóż je jako elementy grupy ilorazowej.

Zadanie 10 Opisz warstwy lewostronne i prawostronne podgrupy S_3 w S_4 . Czy potrafisz uogólnić tę obserwację na dowolne $S_{n-1} \leq S_n$?

Wskazówka: Można na palcach, ale zastanów się, co się dzieje z obrazem/przeciwobrazem 4?