

Algebra 2016/17 — Egzamin Poprawkowy

Czas: 180 minut.

Każde zadanie należy oddać na **osobnej, podpisanej numerem indeksu** kartce. Rozwiązanie zadania rachunkowego powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; w przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń. *Zadanie nie spełniające powyższego warunku mogą nie być sprawdzane.*

Zadanie 1 Dla podanej permutacji σ podaj jej rozkład na cykle. Czy σ jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ ? Oblicz permutację odwrotną σ^{-1} do σ . Podaj jej rozkład na cykle. Czy σ^{-1} jest permutacją parzystą? Jaki jest rząd σ^{-1} ?

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 7 & 5 & 6 & 11 & 4 & 8 & 1 & 15 & 3 & 9 & 16 & 14 & 12 & 13 & 10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 2 Wykonaj poniższe obliczenia modulo 5 oraz 7. Oznaczenie n^{-k} oznacza element odwrotny do $n \pmod 5$ w $\mathbb{Z}_5$ (analogicznie w $\mathbb{Z}_7$) podniesiony do potęgi k .

$$\begin{aligned} (1) & 35^{12} + 12^{35} + 245^4 - 245^5 + 175^6 - 175^7 + (41 \cdot 64) - 187^{-4} \cdot 121^2 + (75 \cdot 49 - 16 \cdot 6)^{-3}; \\ (2) & -(342^{12} \cdot 284^{13} - 12^{-15} \cdot 47^{25})^{49} - (77^{15} \cdot 125^{12} - 15 \cdot 21)^{143} + (66^4 \cdot 33^{-4} - 64 \cdot 81)^2. \end{aligned}$$

Zadanie 3 Ile rozwiązań ma poniższy układ równań nad $\mathbb{Z}_7$ w zależności od parametru $\lambda \in \mathbb{Z}_7$?

$$\begin{cases} (5-2\lambda)x & + & (\lambda+4)y & + & 6z & = & 3+2\lambda \\ \lambda x & + & 5y & + & 6z & = & -\lambda \\ x & + & 3y & + & 5z & = & 6 \end{cases}.$$

Zadanie 4 Dla podanych poniżej wielomianów $f, g \in \mathbb{R}[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{R}$ podziel (z resztą) f przez g i wyraż $\gcd(f, g)$ w postaci $af + bg$, gdzie a, b również są wielomianami z tego pierścienia:

$$f = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x \quad g = x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2.$$

Zadanie 5 Wyznacz bazy: obrazu i jądra przekształcenia liniowego zadanego przez macierz (o wyrazach rzeczywistych):

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 Niech $L : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym, zaś $v_1, \dots, v_k$ jego wektorami własnymi. Pokaż, że $W = \text{LIN}(v_1, \dots, v_k)$ jest przestrzenią niezmienniczą L , tj. $v \in W \implies Lv \in W$.

Zadanie 7 Niech $b_1, \dots, b_n$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$) ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Niech M będzie macierzą kwadratową $n \times n$ o elementach z $\mathbb{R}$.

Pokaż, że M jest ortogonalna wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych i, j

$$\langle b_i, b_j \rangle = \langle Mb_i, Mb_j \rangle.$$

Zadanie 8 Niech G będzie grupą a $H, H' \leq G$ jej podgrupami a $g, g' \in G$ jej dwoma elementami. Pokaż, że jeśli $gH \cap g'H' \neq \emptyset$ to $gH \cap g'H'$ jest warstwą podgrupy $H \cap H'$.

Zadanie 9 Niech $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ będzie macierzą odwracalną rozmiaru $n \times n$ zaś $\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ będzie niepustym podzbiorem zbioru indeksów (kolumn i wierszy). Załóżmy, że jeśli $a_{i,j}$ jest niezerowe implikuje, że albo oba i, j należą do I lub oba nie należą do I , formalnie

$$\forall i, j \in I \quad (a_{i,j} \neq 0 \implies (i, j \in I \vee i, j \notin I)).$$

Pokaż, że macierz A^{-1} spełnia analogiczną własność. Co więcej, niech $B = A[I, I]$ (macierz uzyskana przez wybór wierszy i kolumn z I) oraz $B' = A^{-1}[I, I]$. Wtedy

$$B' = B^{-1}.$$