Algebra 2016/17 — Egzamin

Czas: 180 minut.

Każde zadanie należy oddać na **osobnej, podpisanej numerem indeksu** kartce. W przypadku zadań rachunkowych rozwiązanie powinno zawierać opis dokonywanych operacji oraz kroki pośrednie obliczeń; w przypadku dowodu rozwiązanie powinno być czytelną wypowiedzią, a nie jedynie zbiorem symbolicznych przekształceń. *Zadanie nie spełniające powyższego warunku mogą nie być sprawdzane.*

Zadanie 1 Dane są układy wektorów: $S = \{(1,1,1,1)^T, (1,1,3,3)^T\}$, oraz $T = \{(2,0,1,-1)^T, (1,-1,2,0)^T\}$. Z układu $S \cup T$ usuń wektory zależne, tak aby uzyskać maksymalny zbiór liniowo niezależny i dokonaj jego ortonormalizacji (możesz usuwać w czasie ortonormalizacji). Jakie są wymiary przestrzeni $\mathrm{LIN}(S) + \mathrm{LIN}(T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S) \cap \mathrm{LIN}(T)$?

Zadanie 2 Dla podanych poniżej wielomianów $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$ o współczynnikach z $\mathbb{Z}_5$ podziel (z resztą) f przez g i wyraź $\gcd(f,g)$ w postaci $af + bg$, gdzie a, b również są wielomianami z tego pierścienia:

$$f = x^4 + 3x^3 + x^2 + 3 \quad g = x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x + 3 \ .$$

Wskazówka: Może być pomocne, że dla $f, g \in \mathbb{Z}_5[x]$ i $c, c' \in \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$ zachodzi $\gcd(f,g) = \gcd(cf, c'g)$.

Zadanie 3 W pięciokącie foremnym prowadzimy wszystkie pięć przekątnych. Dzielą one ten pięciokąt na dziesięć trójkątów oraz jeden (mniejszy) pięciokąt foremny. Każdą z tych jedenastu figur kolorujemy na jeden z pięciu (różnych) kolorów. Uzyskaną figurę możemy obracać oraz przekładać na drugą stronę (czyli działać na niej grupą obrotów i symetrii pięciokąta foremnego). Ile jest rozróżnialnych (ze względu na obroty i symetrie) takich kolorowań tej figury przy użyciu pięciu kolorów?

Zadanie 4 Ile rozwiązań ma poniższy układ równań w zależności od parametru λ? Układ jest nad $\mathbb{R}$, tym samym $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y + z = \lambda \\ x + \lambda y + \lambda z = \lambda^2 \\ \lambda x + y + \lambda z = -\frac{1}{2}\lambda \end{cases} .$$

Zadanie 5 Niech G będzie grupą zaś $A, B, C \leq G$ jej podgrupami. Udowodnij, że jeśli $C \subseteq A \cup B$ to $C \subseteq A$ lub $C \subseteq B$.

Zadanie 6 Pokaż, że jeśli A, B są macierzami symetrycznymi, to

- $A + B$ też jest symetryczna;
- $AB + BA$ też jest symetryczna;
- jeśli A, B komutują (tj. $AB = BA$) to również AB jest symetryczna.

Zadanie 7 Niech $\sigma \in S_n$ będzie permutacją na n elementach, która w rozkładzie na cykle rozłączne ma c cykli (część z nich może być jednoelementowa). Udowodnij, że parzystość tej permutacji to $(-1)^{n-c}$ (dla przypomnienia: permutacji parzystej przypisujemy $+1$ zaś nieparzystej -1).

Wskazówka: Pokaż najpierw dla σ będącej cyklem.

Zadanie 8 Niech A, B będą komutującymi macierzami kwadratowymi, tj. $AB = BA$. Niech λ będzie wartością własną A, zaś V_λ będzie przestrzenią wektorów własnych A dla wartości λ. Pokaż, że V_λ jest przestrzenią niezmienniczą dla B, tj. dla $v \in V_\lambda$ zachodzi $Bv \in V_\lambda$.

Zadanie 9 Przypomnijmy, że dla układu wektorów $\{v_1, \ldots, v_n\} \in \mathbb{R}^n$ jego *macierz Grama* $M(v_1, \ldots, v_n)$ to $(\langle v_i, v_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,n}$. Pokaż, że macierz N rozmiaru $n \times n$ jest dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy jest macierzą Grama pewnego układu n niezależnych wektorów z $\mathbb{R}^n$.

Wskazówka: Możesz skorzystać z pokazanego na ćwiczeniach faktu, że wyznacznik macierzy Grama układu niezależnych wektorów jest dodatni. Ponadto $[\langle u, v \rangle] = u^T v$, tj. po prawej mamy macierz 1×1 o jedynym elemencie $\langle u, v \rangle$.