

Algebra - Lista 8

Zadanie 1 Udowodnij, że dla macierzy kwadratowych A, B wielomiany charakterystyczne macierzy AB oraz BA są takie same.

Wskazówka: Pokaż tezę najpierw dla B odwracalnego. Następnie dla B , które ma na przekątnej najpierw same 1 a potem same 0. Następnie udowodnij (eliminacja Gaussa), że każda macierz M jest iloczynem macierzy elementarnych oraz macierzy ww. postaci.

Zadanie 2 Sprawdź, które z podanych macierzy można sprowadzić do postaci diagonalnej.

$$\begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Znajdź wartości własne i odpowiadające im wektory własne dla podanych przekształceń liniowych:

- $L((x, y, z)) = (2x - y, 0, y + z)$
- $L((x, y, z)) = (0, 0, y)$

Zadanie 4 (Klatka Jordana) Klatka Jordana wymiaru $n \times n$ to macierz postaci

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Pokaż, że ma ona dokładnie jedną wartość własną λ o krotności algebraicznej n oraz krotności geometrycznej 1.

Zadanie 5 Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne macierzy (nad $\mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Znajdź wartości własne i odpowiadające wektory własne (nad $\mathbb{C}$):

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 Rozważmy macierz kwadratową M wymiaru $n \times n$ oraz jej wielomian charakterystyczny $\varphi_M(x) = \det(M - x \text{Id})$. Udowodnij, że:

- współczynnik $\varphi_M(x)$ przy x^n wynosi $(-1)^n$;
- współczynnik $\varphi_M(x)$ przy x^{n-1} wynosi $(-1)^{n-1} \cdot \text{tr}(M)$;
- współczynnik $\varphi_M(x)$ przy x^0 wynosi $\det(M)$.

Dla przypomnienia: $\text{tr}(M)$ to suma elementów na przekątnej macierzy M .

Zadanie 7 Pokaż, że jeśli λ^2 jest wartością własną macierzy M^2 , to M ma wartość własną λ lub $-\lambda$.

Wskazówka: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Zadanie 8 Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$, tj. dla wektorów $v = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T$, $u = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i.$$

Pokaż, że

$$[\langle u, v \rangle] = u^T v.$$

(zwróć uwagę, że $\langle u, v \rangle$ jest liczbą, a $u^T v$ macierzą).

Wynioskuj z tego, że dla dowolnej macierzy M zachodzi

$$\langle u, Mv \rangle = \langle M^T u, v \rangle$$

Zadanie 9 Niech M będzie macierzą symetryczną (tj. $M = M^T$) wymiaru $n \times n$ a $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie standardowym iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^n$. Pokaż, że

$$\langle u, Mv \rangle = \langle Mu, v \rangle$$

(możesz skorzystać z poprzedniego zadanie).

Wynioskuj z tego, że jeśli $\lambda \neq \lambda'$ są różnymi wartościami własnymi macierzy symetrycznej M o wektorach własnych v oraz v' , to $\langle v, v' \rangle = 0$, tj. v i v' są prostopadłe.

Zadanie 10 (Nierówność Bessela; równość Parsewala) Niech $\{e_1, \dots, e_k\}$ będą układem ortonormalnym, tj.:

- $\forall i \langle e_i, e_i \rangle = 1$;
- $\forall i \neq j \langle e_i, e_j \rangle = 0$.

(Nie zakładamy, że jest bazą).

Pokaż, że dla dowolnego wektora v :

$$\sum_{i=1}^k |\langle e_i, v \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

i równość zachodzi tylko wtedy, gdy $\{e_1, \dots, e_k\}$ jest bazą.