

Algebra - Lista 6

Zadanie 1 Niech $A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & -a & d & -c \\ c & -d & -a & b \\ d & c & -b & -a \end{bmatrix}$. Oblicz AA^T i jej wyznacznik. Wywnioskuj z tego, ile wynosi $\det(A)$.

Zadanie 2 Oblicz wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 100 & 1000 & 10000 & 100000 \\ 0,1 & 2 & 30 & 400 & 5000 & 60000 \\ 0 & 0,1 & 3 & 60 & 1000 & 15000 \\ 0 & 0 & 0,1 & 4 & 100 & 2000 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 5 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3

Niech $q_1, q_2, \dots, q_n$ będą dowolnymi liczbami. Macierz $(n \times n)$ Vandermonde'a V_n ma wyrazy równe $v_{ij} = q_i^{j-1}$, tj.:

$$V_n = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_1^2 & \dots & q_1^{n-1} \\ 1 & q_2 & q_2^2 & \dots & q_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q_n & q_n^2 & \dots & q_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Udowodnij, że

$$\det(V_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (q_j - q_i).$$

W szczególności pokaż, że jeśli q_i są niezerowe i parami różne, to wyznacznik ten jest niezerowy.

Zadanie 4 Rozważmy macierz (wymiaru $n \times n$)

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pokaż, że $\det(A) = f_n$, gdzie f_n jest n -tą liczbą Fibonacciego (tj. $f_0 = f_1 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$).

Zadanie 5 Rozważmy układ równań $AX = B$. Udowodnij, że układy uzyskane przez:

- zamianę i -tego oraz j -tego równania
- dodanie do j -tego równania wielokrotności i -tego
- przemnożenie i -tego równania przez stałą $\alpha \neq 0$

mają ten sam zbiór rozwiązań, co oryginalny układ.

Wskazówka: Można na palcach, ale prościej jest używając macierzy T_{ij} , $\text{Id} + \alpha 1_{ij}$ oraz $D(1, 1, \dots, \alpha, 1, \dots)$.

Zadanie 6 Zadanie to polega na pokazaniu (kolejnego) dowodu twierdzenia Cauchy'ego.

Załóżmy, że macierze kwadratowe A, B są odwracalne. Chcemy pokazać, że $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Zdefiniujmy funkcję $f : (\mathbb{F}^n)^n \rightarrow \mathbb{F}$, o której myślimy, że jest funkcją ze zbioru n kolumn wysokości n w ciało; alternatywnie myślimy o niej jako o funkcji z macierzy w $\mathbb{F}$. Jest ona zdefiniowana jako:

$$f(X) = \frac{1}{\det(A)} \det(AX).$$

Pokaż, że spełnia ona aksjomaty wyznacznika. Wywnioskuj z tego, że jest to wyznacznik.

Obliczając wartość $f(B)$ udowodnij twierdzenie Cauchy'ego.

Zadanie 7 Niech

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

będzie macierzą przekształcenia $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ w bazie standardowej $(1, 0), (0, 1)$. Weźmy nową bazę: $(1, 1), (1, -1)$. Jak wygląda macierz przekształcenia L w tej bazie?

Zadanie 8 Rozważmy $\mathbb{R}^n$. Znajdź macierze przejścia z bazy standardowej do baz (w odpowiednich wymiarach)

$$\{(1, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (1, 0)\}, \{(0, 1), (2, 0)\}, \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\},$$

Zadanie 9 Podaje macierze odwrotne do (sugerowane rozwiązanie za pomocą operacji elementarnych):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 10 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} -t & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ a_2 & -t & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & -t & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n & -t \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1001 & 1002 & 1003 & 1004 \\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002 \\ 1001 & 1001 & 1001 & 999 \\ 1001 & 1000 & 998 & 999 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \dots & -n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \dots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$