

Algebra - Lista 5

Zadanie 1 Rozważmy macierze A wymiaru $n \times n$, C wymiaru $m \times m$, B wymiaru $m \times n$ i macierz wymiaru $n \times m$ złożoną z samych 0 (zapiszmy ją jako $\mathbf{0}$). Wtedy notacja

$$\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ B & C \end{bmatrix}$$

oznacza macierz uzyskaną poprzez zestawienie obok siebie odpowiednich macierzy (tj. macierz A wypełnia lewy górny róg, macierz B lewy dolny, macierz C prawy dolny a macierz $\mathbf{0}$ prawy górny). Pokaż, że

$$\det(M) = \det(A) \cdot \det(C).$$

Zadanie 2 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 20 & 19 & 18 & 17 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{vmatrix}.$$

Zadanie 3

Liczby 144228, 532270, 257567, 209270, 289017, 519792 są podzielne przez 17. Udowodnij, że

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 & 2 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 & 0 \\ 2 & 8 & 9 & 0 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 9 & 7 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

też dzieli się przez 17. W miarę możliwości — bez obliczania tego wyznacznika.

Wskazówka: metoda eliminacji.

Zadanie 4 Zadanie to polega na pokazaniu alternatywnego dowodu tw. Cauchy'ego.

Niech A, B, C będą macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie $C = AB$ oraz $\text{rk}(A) = \text{rk}(B) = n$.

Rozważ macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\text{Id} & B \end{bmatrix}$. Ile wynosi jej wyznacznik?

Pokaż, że przy pomocy operacji kolumnowych (tj. zamiany kolumn i dodawania do kolumny wielokrotności innej kolumny) można macierz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ -\text{Id} & B \end{bmatrix}$ przekształcić do macierzy $\begin{bmatrix} A & C \\ -\text{Id} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ a tą do macierzy $\begin{bmatrix} C & A \\ \mathbf{0} & -\text{Id} \end{bmatrix}$. Ile wynosi wyznacznik tej macierzy?

Dla przypomnienia: dowód poprawności algorytmu obliczania macierzy odwrotnej (przy użyciu metody eliminacji na wierszach macierzy) polegał na przekształcaniu równania $AA^{-1} = \text{Id}$ poprzez (lewostronne) mnożenie przez macierze T_{ij} oraz $\text{Id} + \alpha 1_{ij}$.

Zadanie 5 Podane na wykładzie rozwinięcie Laplace'a zdefiniowane jest dla pierwszej kolumny. Uogólnij je na dowolną kolumnę i wiersz, tj. pokaż, że dla dowolnego j zachodzi

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij})$$

oraz dla dowolnego i zachodzi

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{ij}),$$

gdzie A_{ij} jest minorem powstałym przez wykreślenie i -tego wiersza oraz j -tej kolumny.

Wskazówka: wystarczy transpozycja i zamiana kolumn.

Zadanie 6

Niech A, B będą macierzami odwracalnymi. Pokaż, że

- AB też jest macierzą odwracalną i $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Zadanie 7

Sprawdź, czy podane poniżej macierze są odwracalne i podaj ich macierze odwrotne:

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 8 Dla jakich wartości p podany układ równań ma dokładnie jedno rozwiązanie?

$$\begin{bmatrix} 5 & p & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ p & p & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2+p \end{bmatrix}$$

Zadanie 9 Rozwiąż przy użyciu wzorów Cramera (tj. $x_i = \frac{\det(A_{x_i})}{\det(A)}$) równania:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Zadanie 10 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{vmatrix}.$$