

Algebra - Lista 2

Zadanie 1 Niech S, T będą skończenie-wymiarowymi podprzestrzeniami przestrzeni V . Pokaż, że

$$\dim(S) + \dim(T) = \dim(S \cap T) + \dim(S + T).$$

Wskazówka: rozszerz bazę $S \cap T$.

Z tego Twierdzenia możesz korzystać nawet, jeśli nie umiesz go udowodnić.

Zadanie 2 Pokaż równoważność następujących warunków (dla $B = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$):

- Zbiór B jest liniowo niezależny.
- Wektor $\vec{0}$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B .
- Pewien wektor z $\text{LIN}(B)$ ma dokładnie jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B .
- Każdy wektor z $\text{LIN}(B)$ ma najwyżej jedno przedstawienie w postaci kombinacji liniowej wektorów ze zbioru B .

Zadanie 3 Rozważamy przestrzeń nad $\mathbb{R}$. Niech $v_1, v_2, \dots, v_n$ będą liniowo niezależne. Dla jakich wartości α zbioru wektorów

- $\{\alpha v_1 + v_2, v_1 + \alpha v_2\}$
- $\{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_4, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + \alpha v_1\}$

są liniowo niezależne?

Zadanie 4 Jak na poprzedniej liście, niech M będzie zbiorem skończonym, na zbiorze jego podzbiorów 2^M określamy operacje:

$$U + V := V \Delta U, \quad 1 \cdot U = U, \quad 0 \cdot U = \emptyset,$$

gdzie Δ oznacza różnicę symetryczną, tj. $U \Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$.

Dla zbioru określonego powyżej, niech $V_1, V_2, \dots, V_k \subseteq M$ są takie, że dla każdego i zbiór V_i nie jest podzbiorem sumy pozostałych zbiorów, tj. $V_i \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} V_j$. Pokaż, że $V_1, V_2, \dots, V_k$ są liniowo niezależne.

Zadanie 5 Wyznacz wymiary $\text{LIN}(S) \cap \text{LIN}(T)$ oraz $\text{LIN}(S) + \text{LIN}(T)$ dla

- $S = \{(1, 2, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$, $T = \{(1, 0, 1, 0), (1, 3, 0, 1)\}$;
- $S = \{(1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, 3, 1, 3)\}$, $T = \{(1, 2, 0, 2), (1, 2, 1, 2), (3, 1, 3, 1)\}$;
- $S = \{(2, -1, 0, -2), (3, -2, 1, 0), (1, -1, 1, -1)\}$, $T = \{(3, -1, -1, 0), (0, -1, 2, 3), (5, -2, -1, 0)\}$.

Zadanie 6 Niech $V' < V$ będzie podprzestrzenią liniową, zaś U i U' jej warstwami. Pokaż, że

$$U = U' \text{ lub } U \cap U' = \emptyset.$$

Zadanie 7 Używając podobnych technik, jak na wykładzie, pokaż, że ciągi (o wyrazach w $\mathbb{R}$) spełniające równanie:

$$(1) \quad b_n = b_{n-1} + b_{n-2} - 1$$

są warstwą przestrzeni ciągów spełniających równanie

$$b_n = b_{n-1} + b_{n-2}.$$

Wskazówka: żądany wektor u ma wszystkie wyrazy stałe. Podaj ogólną postać (wszystkich) ciągów spełniających równanie (1).

Zadanie 8 Załóżmy, że V jest przestrzenią skończenie-wymiarową. Niech U -zbiór liniowo niezależny a $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ spełnia $\text{LIN}(v_1, \dots, v_k) = V$. Pokaż, że albo U jest bazą, albo istnieje $v_i \in \{v_1, \dots, v_k\}$, taki że $\{v_i\} \cup U$ jest liniowo niezależny.

Zadanie 9 Dla poniższych zbiorów wektorów sprawdź, czy są one bazą przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Jeśli nie, to wybierz z nich maksymalny zbiór liniowo niezależny X i podaj dowolny zbiór wektorów Y , taki że $X \cup Y$ jest bazą.

- $\{(1, 0, -1, 2), (2, 3, 4, 1), (0, 0, 1, 0)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$
- $\{(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 0)\}$
- $\{(1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (2, 0, 1, 1), (-1, 0, 1, -2)\}$

Zadanie 10 Uzasadnij, że poniższe zbiory wektorów są liniowo niezależne (w odpowiednim $\mathbb{R}^n$), rozszerz je do bazy (odpowiedniego) $\mathbb{R}^n$:

- $(2, 2, 7, -1), (3, -1, 2, 4), (1, 1, 3, 1)$;
- $(2, 3, -4, -1), (1, -2, 1, 3)$;
- $(4, 3, -1, 1, 1), (2, 1, -3, 2, -5), (1, -3, 0, 1, -2), (1, 5, 2, -2, 6)$;
- $(2, 3, 5, -4, 1), (1, -1, 2, 3, 5)$.