Algebra - Lista 7

Zadanie 1 W podanych zbiorach wektorów znajdź maksymalny podzbiór niezależny i uzupełnij go do bazy odpowiedniej przestrzeni $\mathbb{R}^n$:

- $(4,3,-1,1,1),(2,1,-3,2,-5),(1,-3,0,1,-2),(1,5,2,-2,6)$
- $(2,3,5,-4,1),(1,-1,2,3,5)$
- $(1,2,1),(2,3,3),(3,8,2)$

Zadanie 2 Pokaż, że $\mathbb{C}$ jest przestrzenią liniową nad $\mathbb{Q}$. Pokaż, że wektory $1,\sqrt{2},\sqrt{5},i$ są w niej liniowo niezależne.

Zadanie 3 Wyznacz wymiary $\mathrm{LIN}(S\cap T)$ oraz $\mathrm{LIN}(S+T)$ dla przestrzeni liniowych S oraz T określonych jako

- $S=\mathrm{LIN}((1,2,1),(1,1-1),(1,3,3))$, $T=\mathrm{LIN}((1,2,2),(2,3,1),(1,1,3))$
- $S=\mathrm{LIN}((-1,6,4,7,-2),(-2,3,0,5,-2),(-3,6,5,6,-5))$, $T=\mathrm{LIN}((1,1,2,1,-1),(0,-2,0,-1,-5),(2,0,2,1,-3))$
- $S=\mathrm{LIN}((1,2,1,0),(-1,1,1,1))$, $T=\mathrm{LIN}((2,-1,0,1),(1,-1,3,7))$.

Zadanie 4 (Ślad macierzy) *Śladem* macierzy kwadratowej jest suma elementów na jej przekątnej, tj.

$$\mathrm{tr}((a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n})=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}.$$

Pokaż, że:

- $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^T)$;
- $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$;
- dla macierzy podobnych A,B zachodzi $\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)$ (dla przypomnienia: macierze M,N są podobne, gdy istnieje A-odwracalna, taka że $M=A^{-1}NA$).

Z ostatniego punktu wywnioskuj, że ślad jest też dobrze określony dla przekształceń liniowych.

Zadanie 5 Podaje macierze odwrotne do (sugerowane rozwiązanie za pomocą operacji elementarnych):

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}.$$

Zadanie 6 Oblicz wyznaczniki:

$$\begin{vmatrix}-t&0&0&0&\ldots&0&a_1\\a_2&-t&0&0&\ldots&0&0\\0&a_3&-t&0&\ldots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots&\\0&0&0&0&\ldots&a_n&-t\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1001&1002&1003&1004\\1002&1003&1001&1002\\1001&1001&1001&999\\1001&1000&998&999\end{vmatrix},\quad\begin{vmatrix}1&1&\ldots&1&-n\\1&1&\ldots&-n&1\\\vdots&\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&-n&\ldots&1&1\\-n&1&\ldots&1&1\end{vmatrix}$$

Zadanie 7 Zbadaj ilość rozwiązań podanych układów równań w zależności od parametru λ:

$$\begin{bmatrix}1+\lambda&1&1\\1&1+\lambda&1\\1&1&1+\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda^2+3\lambda\\\lambda^3+3\lambda^2\\\lambda^4+3\lambda^3\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}2&5&1&3\\4&6&3&5\\4&14&1&7\\2&-3&3&\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\4\\7\end{bmatrix}.$$

Zadanie 8 Opisz przestrzeń rozwiązań poniższych układów równań (np. poprzez podanie bazy odpowiedniej przestrzeni liniowej)

$$\left\{\begin{array}{rrrcl}&x_1&-x_3&=&0\\&x_2&-x_4&=&0\\-x_1+&x_3&-x_5&=&0\\-x_2+&x_4&-x_6&=&0\\&&-x_3\;+x_5&=&0\\&&-x_4\;+x_6&=&0\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{lllcl}&x_1&+x_2&=&0\\x_1&+x_2&+x_3&=&0\\x_2&+x_3&+x_4&=&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\x_{n-2}&+x_{n-1}&+x_n&=&0\\&x_{n-1}&+x_n&=&0\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{rrrrcl}x_1&+x_2&-2x_3&+2x_4&=&0\\3x_1&+5x_2&+6x_3&-4x_4&=&0\\4x_1&+5x_2&-2x_3&+3x_4&=&0\\3x_1&+8x_2&+24x_3&-19x_4&=&0\end{array}\right.$$

Zadanie 9 Zauważmy, że potęgi macierzy A kwadratowej (dla ustalenia uwagi: nad ciałem K) są przemienne, tzn. $A^k A^\ell = A^\ell A^k$ i tym samym dla wielomianu $p(x) = \sum_{i=0}^k a_i x^i$ o współczynnikach z ciała K wartość $p(A) = \sum_{i=0}^k a_i A^i$ jest dobrze zdefiniowana.

Udowodnij, że dla każdej macierzy kwadratowej A istnieje (niezerowy) wielomian p_A, taki że $p_A(A)$ jest macierzą zerową. (Tak naprawdę, to stopień tego wielomianu jest nie większy, niż wymiar macierzy, ale nie musisz tego pokazywać).

Wskazówka: Rozważ kolejne potęgi A i potraktuj je jako wektory w odpowiedniej przestrzeni liniowej. Co możesz powiedzieć o ich niezależności?

Zadanie 10 Niech $D = D(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ będzie macierzą przekątniową o elementach $a_1, a_2, \ldots, a_n$ na przekątnej a $\varphi_D(x)$ jej wielomianem charakterystycznym. Pokaża, że $\varphi_D(D)$ jest macierzą zerową.

Niech M będzie macierzą podobną do D. Wykaż, że $\varphi_D(M)$ również jest macierzą zerową.