Algebra - Lista 3

Niestety nie udało mi się powiedzieć na wykładzie, jak dodawać i mnożyć przez skalar macierze. Dodajemy po współrzędnych, mnożymy każdą współrzędną z osobna, to znaczy:

$$(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} + (b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}}$$
$$\alpha(a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} = (\alpha a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}}$$

Łatwo też sprawdzić, że mnożenie macierzy jest łączne, tj.: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$, gdy tylko takie mnożenie ma sens (ze względu na wymiary).

Zadanie 1 Wyznacz jądro i obraz (np. poprzez podanie generujących je wektorów) dla następujących przekształceń liniowych (z $\mathbb{R}^3$)

- $F(x, y, z) = (2x + y, 3x - z, 5x + y - z, -2x + 2y - 2z)$;
- $F(x, y, z) = (x + y, y - 2z, 3z, x - y)$;
- $F(x, y, z) = (x + y, y + z)$;
- $F(x, y, z) = (x + y, 2y + z, y - z)$;
- $F(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y, 3x + 3y)$.

Zadanie 2 Rozważmy przestrzeń wielomianów o stopniu najwyżej 7 nad ciałem $\mathbb{Z}_5$ oraz przekształcenie liniowe zdefiniowane jako suma pierwszej i drugiej pochodnej, tj.: $F(x^i) = ix^{i-1} + i(i-1)x^{i-2}$, gdzie $i(i-1)x^{i-2}$ dla $i < 2$ oznacza 0.

Wyznacz jądro $\ker F$ i obraz $\operatorname{Im} F$ tego przekształcenia (np. podaj ich bazy). Podaj ich wymiary.

Zadanie 3 Dane jest przekształcenie liniowe $F : V \mapsto W$. Udowodnij, następujące warunki są równoważne:

- F jest różnowartościowe;
- $\dim(\ker(F)) = 0$;
- $\ker(F)$ składa się z jednego wektora;
- $\operatorname{rk}(F) = \dim(V)$.

Zadanie 4 Załóżmy, że dla przekształcenia liniowego $L : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ zachodzi $L^3(v) = \vec{\mathbf{0}}$, dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^2$. Pokaż, że wtedy również $L^2(v) = \vec{\mathbf{0}}$, dla każdego wektora v.

Udowodnij także uogólnienie tego twierdzenia: jeśli dla $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ oraz pewnego $k > n$ zachodzi $L^k(v) = \vec{\mathbf{0}}$ dla dowolnego v, to zachodzi również $L^n(v) = \vec{\mathbf{0}}$.

Wskazówka: rozważ wektory $v, L(v), L^2(v), \ldots, L^n(v)$. Są one liniowo zależne.

Zadanie 5(Nierówność Frobeniusa) Udowodnij, że dla dowolnych przekształceń liniowych F, G, H (o odpowiednich dziedzinach i przeciwdzinach) zachodzi:

$$\operatorname{rk}(FG) + \operatorname{rk}(GH) \le \operatorname{rk}(G) + \operatorname{rk}(FGH).$$

Zadanie 6 Pokaż, że dla macierzy A, B, C odpowiednich wymiarów oraz skalara α (Id oznacza macierze identycznościową/jednostkową odpowiedniego wymiaru, tj. mającą na przekątnej jedynkę oraz zera w innych miejscach):

$$\mathrm{Id} \cdot A = A \cdot \mathrm{Id}$$
$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$
$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$
$$\alpha(A \cdot B) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$$

Wywnioskuj z tego, że zbiór macierzy $n \times m$ nad K jest przestrzenią liniową nad K.

Zadanie 7 Definiujemy *transpozycję* macierzy jako „obrócenie” jej wokół przekątnej lewy-górny róg–prawy-dolny róg.

Formalnie:

$$(a_{ij})^T_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,m}} = (a_{ji})_{\substack{j=1,\ldots,m\\ i=1,\ldots,n}}.$$

Pokaż, że

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Zadanie 8 Zdefiniujmy $f_0 = 0, f_1 = 1$ oraz $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$. Rozważmy macierz $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Pokaż, że dla $k \geq 1$ zachodzi

$$M^k = \begin{bmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{bmatrix} \text{ oraz } M^k \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{bmatrix}.$$

Rozważając równość $M^{n+k} = M^k \cdot M^n$ wyprowadź zależność:

$$f_{n+k} = f_{k-1}f_n + f_k f_{n+1} = f_k f_{n-1} + f_{k+1} f_n.$$

Zadanie 9 Oblicz (macierze są nad $\mathbb{R}$) $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}^n$; $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}^2$; $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Zadanie 10 Ustalmy macierz A wymiaru $n \times n$. Pokaż, że zbiór macierzy B, takich że $AB = BA$, jest przestrzenią liniową.

Znajdź wszystkie macierze B wymiaru 2×2 spełniające warunek $B \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot B$.