

Egzamin licencjacki/inżynierski — 14 lutego 2019

Z sześciu poniższych zestawów zadań (Matematyka I, Programowanie, Matematyka dyskretna, Algorytmy i struktury danych, Metody numeryczne, Matematyka II) należy wybrać i przedstawić na osobnych kartkach rozwiązanie trzech zestawów.

Za brakujące (do trzech) zestawy zostanie wystawiona ocena niedostateczna z urzędu. Egzamin uważa się za zaliczony, jeśli student rozwiąże z oceną dostateczną co najmniej 2 zestawy. Wtedy ocena z egzaminu jest średnią arytmetyczną ocen z trzech wybranych zestawów. Na rozwiązanie przeznaczona jest czas $3 \times 40 = 120$ minut. Po wyjściu z sali egzaminacyjnej w czasie egzaminu nie ma możliwości powrotu do tej sali i kontynuowania pisania egzaminu.

Matematyka I — Logika dla informatyków

Jaka jest moc zbioru relacji równoważności na zbiorze liczb naturalnych? Udowodnij poprawność swojej odpowiedzi.

Uwaga: To jest zadanie z logiki. Przy ocenianiu zwrócimy szczególną uwagę na poprawność i klarowność rozumowania, w szczególności na odpowiednie sformułowanie i użycie wszystkich założeń, odpowiednie użycie kwantyfikatorów i nawiasów itp.

Programowanie

Za tę część egzaminu można otrzymać 20 punktów. Aby otrzymać ocenę dostateczną, należy zdobyć 7 punktów, próg dla dst+ to 9p, dla db – 11p, dla db+ 13p, dla bdb – 15p.

Zadanie 1. Gramatyka G_1 z symbolem startowym S nad alfabetem $\{a, b, c\}$ dana jest za pomocą następującego zbioru produkcji P :

$$\begin{aligned} A &\rightarrow a, A \rightarrow aA, \quad B \rightarrow b, B \rightarrow bB, \quad C \rightarrow c, C \rightarrow cC, \\ S &\rightarrow ASA, S \rightarrow A, \quad S \rightarrow BSB, S \rightarrow B, \quad S \rightarrow CSC, S \rightarrow C, \quad S \rightarrow \varepsilon \end{aligned}$$

Dla gramatyki G przez $L(G)$ rozumiemy język generowany przez G . Dla wyrażenia regularnego r przez $\mathcal{L}(r)$ rozumiemy język opisany przez wyrażenie r . Uwaga: w niektórych wersjach wyrażań regularnych zamiast znaku $+$ używa się znaku $|$.

- a) Czy $abbccbaa$ należy do $L(G_1)$? Odpowiedź uzasadnij. **(1)**
- b) Czy gramatyka G_2 jest jednoznaczna? Odpowiedź krótko uzasadnij. **(2)**
- c) Opisz zbiór $L(G_1) \cap \mathcal{L}(a + b)^*$. Czy jest on regularny? Odpowiedź uzasadnij. **(3)**
- d) Opisz jednym zdaniem, jakie słowa należą do zbioru:

$$A = L(G_1) \cap \mathcal{L}((ab + ac + ba + ca)^*)$$

Napisz w języku imperatywnym funkcję, która bierze jako wejście napis i zwraca wartość logiczną, równą True wtedy i tylko wtedy, gdy ten napis należy do zbioru A . Możesz używać języka wybranego z następującej listy: C, C++, Java, C#, Python, Ruby, Go, AWK, Rust. **(4)**

Zadanie 2. (6p) Przyjmijmy, że atom ma głębokość 0 ($\text{depth}(a) = 0$), a ponadto dla termu $f(t_1, \dots, t_n)$ głębokością jest $1 + \max(\text{depth}(t_1), \dots, \text{depth}(t_n))$.

Przyjmijmy, że zdefiniowany jest predykat `arity(-Head, -Arity)`, który generuje wszystkie pary: głowa termu i arność (czyli liczba argumentów) dla tej głowy. Możesz założyć, że rozważamy tylko atomy (arność = 0), termy unarne i binarne.

Napisz predykat `generate_terms(-Term, +Depth)`, który generuje (na pozycji `Term`), wszystkie termy o głębokości `Depth`, zbudowane zgodnie z danymi, zapisanymi w predykatie `arity`.

Możesz zdefiniować predykat(y) pomocnicze. Przypomnienie: `f(1,2,3) =.. [f,1,2,3]`

Zadanie 3. (4p) Napisz w Haskellu funkcję `taksówkowa`, która dla liczby naturalnej zwraca wartość logiczną, mówiącą o tym, czy dana liczba jest *taksówkowa*, to znaczy że może być przedstawiona jako suma sześciątów liczb naturalnych na więcej niż jeden sposób¹. Wykorzystaj mechanizm *list comprehension*.

Matematyka dyskretna

Klaun rozpoczyna występ stojąc na brzegu, przodem do basenu z wodą i trzymając w ręku worek z n czerwonymi i n niebieskimi kulami. W trakcie występu losuje on kule z worka i wrzuca do basenu. Gdy wyciągnie czerwoną kulę robi krok do przodu, a gdy wyciągnie niebieską robi krok do tyłu. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w trakcie występu nie wpadnie on do wody? Nie musisz dowodzić potrzebnych wzorów.

¹Przyjmujemy, że $x = a + b$ oraz $x = b + a$ to ten sam sposób

Algorytmy i struktury danych

Za rozwiązanie obydwu zadań z tej części można otrzymać w sumie do 9 punktów. Skala ocen: poniżej 3 punktów — ocena niedostateczna (egzamin niezdany), 3 punkty dają ocenę dostateczną, 4 — dostateczną z plusem, 5 — dobrą, 6 — dobrą z plusem, 7 albo więcej punktów daje ocenę bardzo dobrą.

Zadanie 1: długa podróż (4 punkty)

Rozważmy następującą wersję problemu wydawania reszty. Dysponujesz nieograniczonym źródłem monet o n różnych nominałach x_1, x_2, \dots, x_n . Dla zadanej kwoty v należy znaleźć zbiór monet o łącznej wartości równej v . Nie zawsze jest to możliwe: jeśli na przykład nominały wynoszą 5 i 10, to można uzbierać kwotę 25 ($= 5 + 10 + 10$), ale 12 już nie.

Opisz algorytm działający w czasie $O(nv)$, który sprawdzi czy można uzbierać kwotę v używając monet o nominałach x_1, x_2, \dots, x_n . Opisz ideę algorytmu, uzasadnij jego poprawność i oszacuj złożoność obliczeniową (czasową i pamięciową).

Zadanie 2: kopiec dwumianowy w algorytmie Dijkstry (5 punktów)

Opisz budowę *kopców dwumianowych*:

- Jakie operacje są wykonywane na takich kopcach? Opisz krótko każdą z nich.
- Kopce dwumianowe zbudowane są z drzew dwumianowych. Jaką strukturę mają takie drzewa?
- Jaki porządek jest ustalony w kopcu dwumianowym?
- Napisz w pseudokodzie implementację operacji *meld*. Jak wykorzystuje się tę operację do implementacji innych operacji na kopcu dwumianowym?
- Przeanalizuj złożoność czasową operacji wykonywanych na kopcach dwumianowych?

Następnie krótko opisz działanie *algorytmu Dijkstry* znajdowania najkrótszych ścieżek z pojedynczego źródła w grafie ważonym o nieujemnych wagach krawędzi. Jak wykorzystać kopiec dwumianowy w tym algorytmie? Jaka jest złożoność obliczeniowa algorytmu Dijkstry z zastosowaniem kopca dwumianowego?

Metody numeryczne

Za rozwiązanie zadania można otrzymać łącznie 12 punktów. Otrzymanie 4 pkt. gwarantuje ocenę dostateczną, próg dla dst+ to 5.5 pkt., dla db – 7 pkt., dla db+ 9 pkt., a dla bdb – 11 pkt.

1. **3 punkty** Wyjaśnij, jakie znaczenie z punktu widzenia metod numerycznych ma pojęcie uwarunkowania zadania.
2. **3 punkty** Pomiary (t_k, c_k) ($0 \leq k \leq N$; $t_k > 0$, $c_k > 1$) pewnej zależnej od czasu wielkości fizycznej C sugerują, że wyraża się ona wzorem

$$C(t) = e^{A \sin(t)}.$$

Stosując aproksymację średniokwadratową, wyznacz prawdopodobną wartość parametru A .

3. **6 punkty** Niech dana będzie nieosobliwa macierz trójkątna górna $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Zaproponuj algorytm obliczania macierzy U^{-1} . Podaj jego złożoność obliczeniową i pamięciową.

Matematyka II — Algebra

Zadanie 1. (5 punktów)

Przekształcenie liniowe T jest bijekcją. Sprawdzić, że przekształcenie odwrotne T^{-1} jest również bijekcją.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 2. (9 punktów)

S_4 to grupa permutacji zbioru $\{1, 2, 3, 4\}$ (wraz z działaniem składania permutacji). Niech symbol A_3 oznacza zbiór permutacji $\sigma \in S_4$ takich, że $\sigma(4) = 4$.

- a) (3) Sprawdzić, że A_3 jest podgrupą grupy S_4 ;
- b) (1) Ile jest warstw (lewo-/prawo-)stronnych względem A_3 ?
- c) (p_1) Podać postać warstw lewostronnych względem A_3 ;
- d) (p_2) Opisać warstwy prawostronne względem A_3 .

$p_1 + p_2 \leq 5$. Można rozwiązać c) a potem krótko punkt d) lub na odwrót. Jedna z części powinna być w miarę szczegółowa.

Progi punktowe: 4, 6, 8, 10, 12 punktów