Teoretyczne podstawy języków programowania

Lista 8

1.12.2004

Zadanie 1. W twierdzeniu, sformułowanym na wykładzie, były postulowane trzy własności algorytmu *Unify*:
a) Dla każdego zbioru par wyrażeń E algorytm *Unify*(E) kończy pracę.
b) Jeśli *Unify*(E) kończy się sukcesem, to wynikiem jest podstawienie unifikujące E.
c) Jeśli istnieje podstawienie R unifikujące E, to *Unify*(E) kończy się sukcesem, a wynikiem jest najogólniejsze podstawienie S unifikujące E, tzn. istnieje podstawienie T takie, że $R = T \circ S$.
Udowodnij te własności.
Wskazówka.
Część a). Zdefiniuj miarę złożoności zbioru E jako parę (m, n), gdzie m jest liczbą różnych zmiennych w zbiorze E, a n jest liczbą wszystkich wystąpień zmiennych i stałych (z zadanej sygnatury Σ) w zbiorze E. Pary są uporządkowane leksykograficznie.
Część b) i c). Indukcja po liczbie wywołań rekurencyjnych w obliczeniu *Unify*(E).

Zadanie 2. Typy w algorytmach *Unify* czy PT są zwykle reprezentowane za pomoc acyklicznych grafów skierowanych (dagi). Wszystkie wystąpienia tej samej zmiennej są w dagu reprezentowane przez jeden wierzchołek.
a) Narysuj dag reprezentujący typ $\alpha \to \beta$. Ponieważ nie ma w nim kilkakrotnych wystąpień tej samej zmiennej, przypomina on drzewo rozbioru. Powinien mieć trzy wierzchołki i dwie skierowane krawędzie.
b) Narysuj dag reprezentujący typ $\alpha \to \alpha$. Powinien on mieć dwa wierzchołki i dwie skierowane krawędzie.
c) Narysuj dwa dagi reprezentujące typ $(\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$, pierwszy z trzema wierzchołkami, a drugi z większą liczbą wierzchołków. Czy można ten typ reprezentować za pomocą dagu z mniejszą niż trzy liczbą wierzchołków?
d) Pokaż, że dla każdego $n > 0$ istnieje typ τ_n, który można reprezentować za pomocą dagu z co najwyżej $n + 1$ wierzchołkami, ale który wymaga co najmniej 2^n symboli w zwykłym zapisie liniowym.

Zadanie 3. Wykonaj ręcznie *Unify*$(\alpha \to \alpha \stackrel{?}{=} (\beta_1 \to \beta_2) \to (\gamma_1 \to \gamma_2))$.

Zadanie 4. Wykonaj ręcznie $PT(\lambda x.\lambda y.xy)$ oraz $PT(\lambda x.xx)$.

W zadaniach 5–7 należy znaleźć typ główny termu i odpowiedzieć na następujące pytania: Jaka jest długość tego typu? Ile jest w nim różnych zmiennych? Jaki jest rozmiar (ilość węzłów) reprezentującego ten typ dagu?

Zadanie 5. $\lambda x_n\, x_{n-1} \ldots x_1.x_n\,(x_n\, x_{n-1}) \ldots (x_2\, x_1)$

Zadanie 6.

$\texttt{let}\ x_0 = \lambda z.z\ \texttt{in}$
$\quad\texttt{let}\ x_1 = (x_0, x_0)\ \texttt{in}$
$\quad\quad\ldots$
$\quad\quad\quad\texttt{let}\ x_n = (x_{n-1}, x_{n-1})\ \texttt{in}$
$\quad\quad\quad\quad x_n$

Zadanie 7.

$\texttt{let}\ f_0 = \lambda x.(x, x)\ \texttt{in}$
$\quad\texttt{let}\ f_1 = \lambda y.f_0\,(f_0\, y)\ \texttt{in}$
$\quad\quad\ldots$
$\quad\quad\quad\texttt{let}\ f_n = \lambda y.f_{n-1}\,(f_{n-1}\, y)\ \texttt{in}$
$\quad\quad\quad\quad f_n\,(\lambda z.z)$