Teoretyczne podstawy języków programowania

Lista 7

24.11.2004

Zadanie 1. W systemie dedukcji naturalnej dla odpowiednich logik udowodnij poniższe twierdzenia.

	logika intuicjonistyczna	logika klasyczna
(1)	$\vdash \neg\neg(\varphi \vee \neg\varphi)$	$\vdash \varphi \vee \neg\varphi$
(2)	$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	$\vdash \varphi \leftrightarrow \neg\neg\varphi$
(3)	$\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\neg\varphi$	
(4)	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$	$\vdash (\neg\varphi \vee \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \wedge \psi)$
(5)	$\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	$\vdash (\neg\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
(6)	$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	$\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$
(7)	$\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \rightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$	$\vdash (\varphi \wedge \neg\psi) \leftrightarrow \neg(\varphi \rightarrow \psi)$

Zauważ, że w dowodzie implikacji z prawej strony w lewą w logice klasycznej trzeba użyć reguły sprowadzenia do sprzeczności (RAA), reguły podwójnego zaprzeczenia ($\neg\neg$) lub reguły wykluczonego środka (TND).

Zadanie 2. Przedstaw dowody z zadania 1 dla logiki intuicjonistycznej w postaci termów w ET.

Zadanie 3. Zauważ, że typy w systemie F możemy potrakować jako formuły intuicjonistycznego rachunku implikacji drugiego rzędu. W rzeczywistości jest to pełny intuicjonistyczny rachunek zdań drugiego rzędu, ponieważ można w nim zdefiniować pozostałe spójniki zdaniowe i wyprowadzić dla nich zwykłe reguły wnioskowania.
Definiując koniunkcję jak niżej

$$\sigma \wedge \tau \stackrel{\text{def}}{=} \forall\alpha.(\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

wyprowadź dla niej zwykłe reguły wprowadzania i eliminacji. Podaj też termy systemu F, reprezentujące konstruktor pary i funkcje *fst* i *snd*, kodujące odpowiednio regułę wprowadzania i eliminacji dla koniunkcji.
Wskazówka. Przypomnij sobie kodowanie pary w rachunku lambda bez typów.

Zadanie 4. Zdefiniuj pozostałe spójniki zdaniowe ($\vee, \bot, \neg$) i wyprowadź dla nich zwykłe reguły wnioskowania. Podaj też termy, kodujące te reguły.