Teoretyczne podstawy języków programowania

Lista 2

20.10.2004

Zadanie 1. Udowodnij, że poniższe funkcje są pierwotnie rekurencyjne.

$$\mathrm{pred}(n) = \begin{cases} n-1, & \text{gdy } n > 0 \\ 0, & \text{gdy } n = 0 \end{cases} \qquad m \dot{-} n = \begin{cases} m-n, & \text{gdy } m \geq n \\ 0, & \text{gdy } m < n \end{cases}$$

$$|m-n| = \begin{cases} n-m, & \text{gdy } m \geq n \\ m-n, & \text{gdy } m < n \end{cases}$$

$\min(m,n)$ = mniejszy z argumentów $\quad \min(m,n)$ = większy z argumentów

$\min(n_1, \ldots, n_k) \quad \max(n_1, \ldots, n_k)$

Zadanie 2. Udowodnij, że funkcja

$$\sum_{n<k} f(n,\vec{x}) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } k = 0 \\ f(0,\vec{x}) + \cdots + f(k-1,\vec{x}), & \text{gdy } k > 0 \end{cases}$$

jest pierwotnie rekurencyjna (przy założeniu, że f jest pierwotnie rekurencyjna).

Zadanie 3. Udowodnij, że klasa funkcji pierwotnie rekurencyjnych jest zamknięta ze względu na

a) warunkowe definicje rekurencyjne

$$\begin{aligned} f(0,\vec{x}) &= g(\vec{x}) \\ f(n+1,\vec{x}) &= \begin{cases} h_1(n, f(n,\vec{x}), \vec{x}), & \text{gdy } R_1(n,\vec{x}) \\ h_2(n, f(n,\vec{x}), \vec{x}), & \text{gdy } R_2(n,\vec{x}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ h_m(n, f(n,\vec{x}), \vec{x}), & \text{gdy } R_m(n,\vec{x}) \end{cases} \end{aligned}$$

przy czym relacje $R_i(n,\vec{x})$ wykluczają się wzajemnie oraz wyczerpują wszelkie możliwości (można oczywiście założyć istnienie funkcji charakterystycznych relacji).

b) rekursję o ustalonych k początkowych wartościach

$$\begin{aligned} f(0,\vec{x}) &= g_0(\vec{x}) \\ f(1,\vec{x}) &= g_1(\vec{x}) \\ \ldots\ldots & \\ f(k,\vec{x}) &= g_k(\vec{x}) \\ f(n+1,\vec{x}) &= h(n, f(n,\vec{x}), \vec{x}), \quad \text{gdy } n \geq k \end{aligned}$$

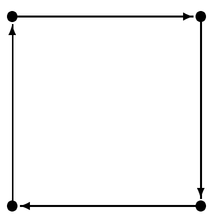
Zadanie 4. Dokończ dowód o lambda definiowalności funkcji rekurencyjnych.

Zadanie 5. Narysuj grafy β-redukcji dla termów:

a) WWW, gdzie $W \equiv \lambda xy.xyy$ $\qquad$ b) MM, gdzie $M \equiv \lambda x.(\lambda y.yy)$

Zadanie 6. Znajdź lambda termy, posiadające poniższe grafy β-redukcji.

a)



b)