Metody iteracyjne dla nierówności wariacyjnych
Andrzej Cegielski

Streszczenie: Wiele problemów optymalizacji wypukłej w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ i normą $\| \cdot \|$ można przedstawić w postaci następującej nierówności wariacyjnej $\mathrm{VIP}(\mathcal{F}, C)$:

> Dany jest podzbiór niepusty, domknięty i wypukły $C \subset \mathbb{R}^n$ i odwzorowanie monotoniczne $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Należy znaleźć $\bar{x} \in C$ taki, że $\langle \mathcal{F}\bar{x}, z - \bar{x} \rangle \geq 0$ dla dowolnego $z \in C$ (o ile taki $\bar{x}$ istnieje).

Przykładem nierówności wariacyjnej jest zadanie minimalizacji funkcji wypukłej różniczkowalnej $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na zbiorze domkniętym wypukłym $C \subset \mathbb{R}^n$. W tym przypadku $\mathcal{F} = \nabla f$ i nierówność wariacyjna mówi, że pochodna kierunkowa w punkcie $\bar{x}$ w dowolnym kierunku dopuszczalnym jest nieujemna. Jak wiadomo, jest to warunek konieczny i wystarczający na to, aby punkt $\bar{x}$ był minimizerem funkcji wypukłej f na zbiorze C. Jeśli odwzorowanie $\mathcal{F}$ jest mocno monotoniczne i lipschitzowskie, to twierdzenie Banacha o punkcie stałym gwarantuje istnienie dokładnie jednego rozwiązania nierówności wariacyjnej $\mathrm{VIP}(\mathcal{F}, C)$. Klasyczną metodą służącą rozwiązaniu tej nierówności jest rzutowa metoda gradientowa $x^{k+1} = P_C(x^k - \mu \mathcal{F} x^k)$ zaproponowana przez Goldsteina, gwarantująca zbieżność do rozwiązania dla dostateczne małego $\mu > 0$. Wadą tej metody jest konieczność wyznaczenia w każdej iteracji rzutu metrycznego, co w wielu przypadkach samo w sobie jest trudnym zadaniem. Przykładem może być wyznaczenie rzutu metrycznego na zbiór $C \subset \mathbb{R}^n$ będący przekrojem zbiorów domkniętych wypukłych $C_i \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, ..., m$. W swoim referacie przedstawię modyfikację rzutowej metody gradientowej, tzw. uogólnioną metodę hybrydową najszybszego spadku, w której w każdej iteracji zastępuje się operator P_C przez operator nieoddalający lub nawet quasi-nieoddalający T_k taki, że $C \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} \operatorname{Fix} T_k$, zaś stałą μ przez ciąg $\lambda_k \to 0$. Mówimy, że operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ posiadający punkt stały jest *quasi-nieoddalający*, jeśli $\|Tx - z\| \leq \|x - z\|$ dla dowolnych $x \in \mathbb{R}^n$ i $z \in \operatorname{Fix} T$. Przykładami operatorów quasi-nieoddalających są: operator nieoddalający posiadający punkt stały (w szczególności rzut metryczny na zbiór domknięty wypukły C) oraz tzw. rzut subgradientowy. Przedstawię rezultaty, w którym podam warunki wystarczające zbieżności do rozwiązania dla ciągów generowanych przez uogólnioną metodę hybrydową najszybszego spadku. Następnie dla nierówności wariacyjnej $\mathrm{VIP}(\mathcal{F}, \bigcap_{i=1}^{m} C_i)$ przedstawię przykłady konkretnych metod spełniających te warunki. Metody te generują więc ciągi zbieżne do rozwiązania tej nierówności. Większość z rezultatów przedstawionych w referacie zachodzi również dla przestrzeni Hilberta.