

ZAAWANSOWANE TECHNOLOGIE JAVY

LICZBY CATALANA

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

Zadanie.

Liczby Catalana to szczególny ciąg liczbowy, mający zastosowanie w wielu różnych aspektach kombinatoryki. Zostały tak nazwane na cześć belgijskiego matematyka *Eugène Charlesa Catalana* (1814–1894). Początkowe wartości tego ciągu (zaczynając od wyrazu zerowego) to: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012, 742900, 2674440, 9694845...

W ciągu Catalana n -ty wyraz określony jest wzorem jawnym:

$$C_n = \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n+1)! \cdot n!} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} \quad \text{dla } n \geq 0$$

Kolejne wyrazy ciągu Catalana można też zdefiniować wzorem rekurencyjnym:

$$\begin{cases} C_0 &= 1 \\ C_{n+1} &= \sum_{i=0}^n C_i \cdot C_{n-i} = \frac{4n+2}{n+2} \cdot C_n \end{cases}$$

Liczby te zostały po raz pierwszy wprowadzone przez *Leonarda Eulera* w XVIII wieku, który badał liczbę podziałów wielokątów na trójkąty. Catalan rozważał je jako liczbę sposobów rozmieszczeń nawiasów.

*

Napisz i uruchom serwet, który będzie wyświetlał tabelę z kolejnymi liczbami Catalana $C_0, C_1 \dots C_n$, przy czym wartość n (liczba wierszy w tabeli) powinna być określona przez parametr w formularzu. Jeśli tego parametru nie będzie albo będzie on źle zdefiniowany (wartość ujemna lub zbyt duża albo napis niebędący liczbą) to wydrukuj tabelę z 11 pozycjami.

Skompilowany serwet umieść w odpowiedniej strukturze katalogów na serwerze aplikacji. Skonfiguruj go (plik `web.xml`) w taki sposób, aby można się do niego odwołać poprzez nazwę `liczby_catalana`.

Do obliczania i pamiętania kolejnych liczb Catalana wykorzystaj klasę `java.math.BigInteger`.

Wykorzystaj *Apache Tomcat 7.0.14* jako serwer www i serwer aplikacji. Możesz go pobrać ze strony:

<http://tomcat.apache.org/>

*

Liczby Catalana posiadają wiele różnych interpretacji kombinatorycznych. Podane niżej stanowią jedynie przykłady zastosowań tych liczb:

Liczba dróg: Jeżeli rozważymy wszystkie łamane, zaczynające się w początku kartezjańskiego układu współrzędnych i kończące w punkcie $(0, 2n)$ dla każdego $n = 0, 1, 2, \dots$, położone w jego I ćwiartce i złożone z pojedynczych odcinków o początku (x, y) i końcu w punkcie $(x+1, y+1)$ lub $(x+1, y-1)$, gdzie $x, y \in \mathbf{N}$, to ich liczba będzie wyrażona za pomocą C_n .

Liczba rozmieszczeń nawiasów: Poprzez $\star$ rozumiemy pewne nielączne działanie dwuargumentowe. Dla ciągu n argumentów połączonych działaniem $\star$ liczba C_{n-1} wyraża liczbę sposobów, na które można rozmieścić nawiasy w takim wyrażeniu, czyli maksymalną liczbę wyników, które można uzyskać.

Liczba drzew binarnych: Liczba C_n jest równa liczbie różnych ukorzenionych regularnych drzew binarnych o $n+1$ liściach.

Liczba podziałów na trójkąty: Liczba C_n wyraża liczbę sposobów podziału wielokąta wypukłego, mającego $n+2$ krawędzie, na różne trójkąty przy pomocy przekątnych.