

Algorytmy z powrotami

Andrzej Kasiewicz

17 marca 2011

N-Queens w haskellu

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

```
queens 0 = [[]]
queens n = [ x : y | y <- queens (n-1),
                  x <- [1..boardSize], safe x y 1]
safe x [] n = True
safe x (c:y) n = and [ x /= c, x /= c + n,
                      x /= c - n, safe x y (n+1)]
```

Plan prezentacji

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

- Idea algorytmów z powrotami
- Konstrukcja algorytmów dla problemów
 - n-hetmanów
 - sumy podzbioru
 - plecakowego
- Szacowanie złożoności algorytmów

Jakie problemy będą nas interesować?

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Definicja

*Algorytmy z powrotami są wykorzystywane do rozwiązywania problemów, w których z określonego **zbioru** jest wybierana **sekwencja** obiektów tak, aby spełniała ona określone **kryteria**.*

Drzewo przestrzeni stanów

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

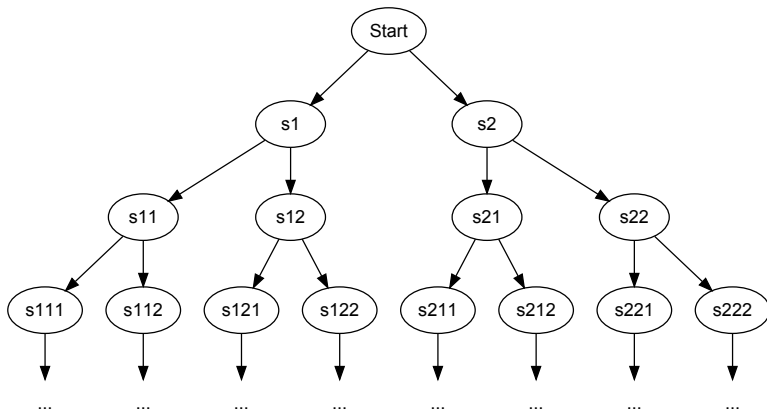
Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Przeszukiwanie drzewa w głąb

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

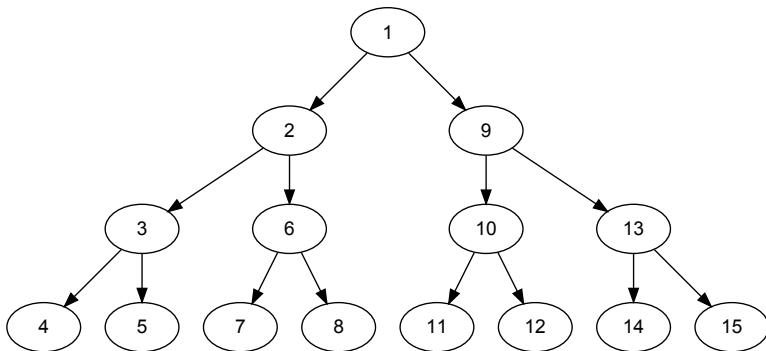
Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Przycinanie

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

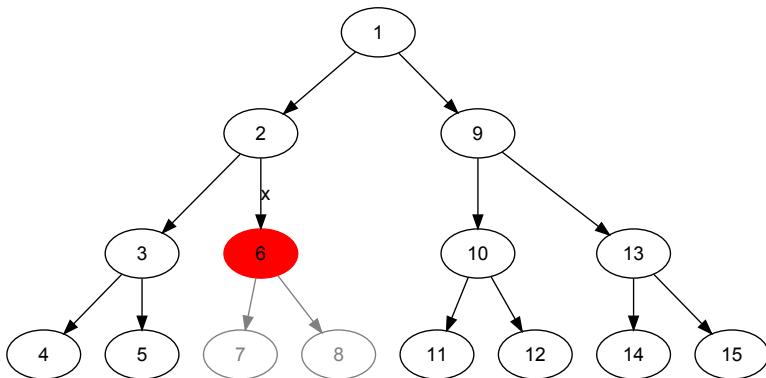
Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Ogólny zarys algorytmów

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

```
void checknode (node v)
{
    node u;

    if (promising(v))
        if (istnieje rozwiązanie dla v)
            drukuj rozwiązanie;
    else
        for (each child u of v)
            checknode(u);
}
```

Problem n-hetmanów

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

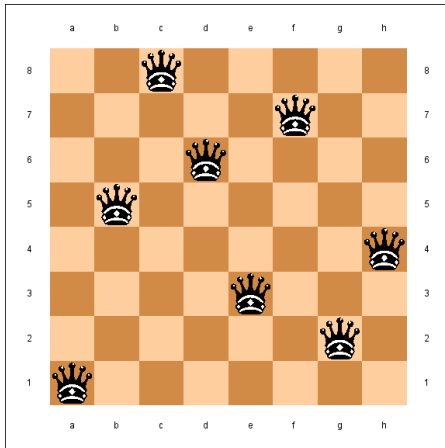
**Problem
n-hetmanów**

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Jak zdefiniować problem?

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Pierwsze podejście dla problemu n-królowych:

- **sekwencja** - ciąg n pozycji na których znajdują się królowe.
- **zbiór** - wszystkie pola na planszy.
- **kryteria** - królowe są w różnych miejscach. Królowe się wzajemnie nie szachują.

Jak zdefiniować problem?

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Lepsze podejście dla problemu n-królowych:

- **sekwencja** - ciąg n liczb odpowiadający miejscom królowych w kolejnych wierszach.
- **zbiór** - liczby od 1 do n .
- **kryteria** - królowe się wzajemnie nie szachują.

Jak przycinać?

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Wstawiając kolejnego hetmana sprawdzić czy nie szachuje on poprzednich. Załóżmy, że sprawdzamy hetmanów z wierszy i oraz k . Szachują się gdy zajdzie jeden z warunków:

- $i = k$
- $col(i) = col(k)$
- $col(i) - col(k) = i - k$
- $col(i) - col(k) = k - i$

Ponieważ hetmanów wstawiamy do kolejnych wierszy pierwszy warunek nigdy nie zajdzie. Jeżeli wiemy że $i > k$ to ostatnie dwa warunki można skrócić do $abs(col(i) - col(k)) = i - k$.

Implementacja część 1

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1
Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

```
void queens (index i)
{
    index j;

    if (promising (i)) {
        if (i == n)
            cout << col[1] through col[n];
        else
            for (j = 1; j <= n; j++){
                col [i+1] = j;
                queens (i+1);
            }
    }
}
```

Implementacja część 2

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

```
void promising (index i)
{
    index k = 1;
    bool switch = true;

    while(k < i && switch){
        if(col[i]==col[k] || abs (col[i]-col[k])==i-k)
            switch = false;
        k++;
    }
    return switch;
}
```

Skuteczność przycinania

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

n	Bez przycinania	n!	Z przycinaniem
4	341	24	61
8	19 173 961	40 320	15 721
12	$9,73 * 10^{12}$	$4,79 * 10^8$	$1,01 * 10^7$
14	$1,20 * 10^{16}$	$8,72 * 10^{10}$	$3,78 * 10^8$

Problem sumy podzbioru

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru

Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Definicja

Mając dany zbiór liczb całkowitych oraz liczbę s rozstrzygnąć, czy istnieje niepusty jego podzbiór sumujący się do s .

Drzewo przestrzeni stanów

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

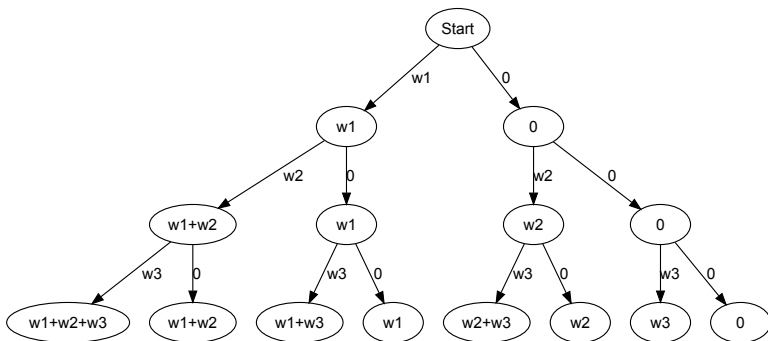
Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Przycinanie

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Nie zakładając niczego o kolejności rozpatrywania elementów, możemy przyciąć gdy:

- Suma wziętych już elementów jest większa od docelowej.
- Osiągnęliśmy docelową sumę. Dalsze przeszukiwanie tej gałęzi nie ma sensu więc tylko zwracamy wynik.
- Wzięcie w danym momencie wszystkich nierozpatrywanych jeszcze elementów nie pozwoli na osiągnięcie sumy docelowej.

Przycinanie

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Ale jeżeli posortujemy rozpatrywane elementy rosnąco, możemy przycinać gdy:

- Wzięcie następnego elementu przekroczy sumę docelową.
- Wzięcie w danym momencie wszystkich nierozpatrywanych jeszcze elementów nie pozwoli na osiągnięcie sumy docelowej.

Przykład: Drzewo bez przycinania

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

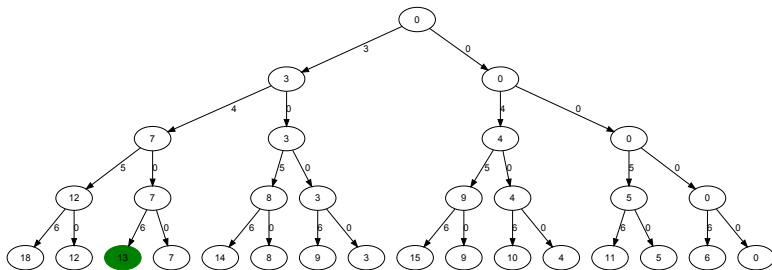
Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Rysunek: $w_1 = 3, w_1 = 4, w_1 = 5, w_1 = 6, W = 13$

Przykład: Drzewo po prostym przycinaniu

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

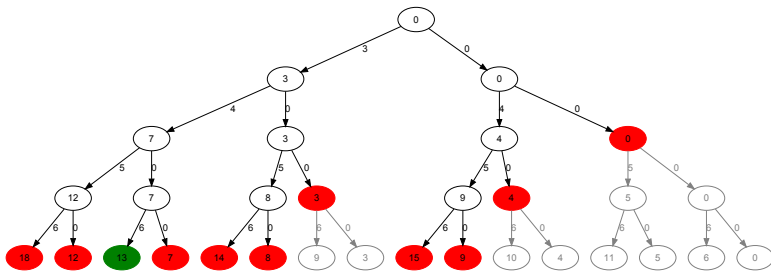
Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

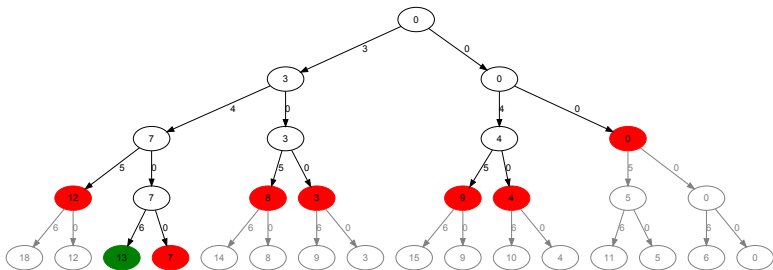


Rysunek: $w_1 = 3, w_1 = 4, w_1 = 5, w_1 = 6, W = 13$

Przykład: Drzewo po ulepszonym przycinaniu

Algorytmy z powrotami

- Problem n-hetmanów
- Problem sumy podzbioru
- Problem plecakowy 0-1



Rysunek: $w_1 = 3, w_1 = 4, w_1 = 5, w_1 = 6, W = 13$

Problem plecakowy 0-1

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

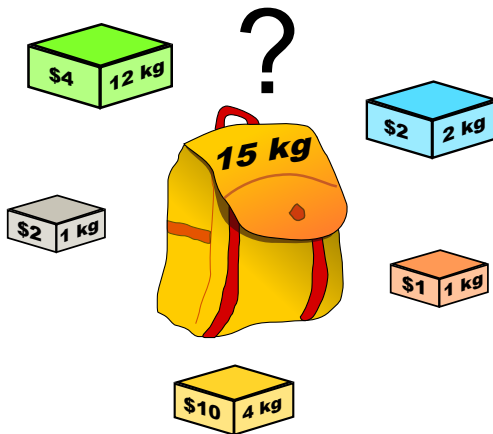
Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Algorytmy z powrotami dla problemów optymalizacyjnych

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1
Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Jest to problem optymalizacyjny, będziemy szukać najlepszego rozwiązania dopuszczalnego.

```
void checknode (node v)
{
    node u;

    if (promising(v))
        if (v jest lepsze od best)
            best := v;
        else
            for (each child u of v)
                checknode(u);
}
```

Konstrukcja algorytmu

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów

Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Dwie możliwości:

- Zmodyfikować algorytm dla sumy podzbioru. Elementy będą sprawdzane w kolejności niemalejących ciężarów.
- Posortować malejąco elementy według wartości p_i/w_i .

Przycinanie

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Możemy przycinać gdy:

- Suma ciężarów wziętych elementów jest większa od pojemności plecaka.
- Górna granica zysku, jaki może zostać uzyskany poniżej sprawdzanego węzła nie pozwoli na polepszenie aktualnie znalezionego najlepszego wyniku.

Liczenie górnej granicy zysku

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Aby policzyć górną granicę zysku:

- Upychamy plecak zachłannie aż do momentu gdy kolejny element już się nie będzie mieścił.
- Dodajemy ułamek wartości kolejnego elementu odpowiadający ułamkowi wagi, która się mieści w plecaku.

Przycięte drzewo

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

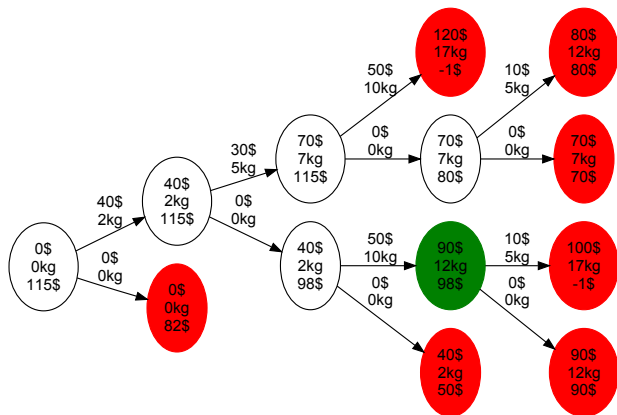
Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec



Rysunek: $w_1 = 2kg$, $p_1 = 40\$$, $w_2 = 5kg$, $p_2 = 30\$$, $w_3 = 10kg$,
 $p_3 = 50\$$, $w_4 = 5kg$, $p_4 = 10\$$, $W = 16kg$

Zmierzone wyniki

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

n	AVG	MAX
5	12	29
10	30	71
20	71	263
50	216	597
100	603	1931
200	1226	3591
500	4257	10975
1000	12494	31459
2000	29977	77117

Tabela: Liczby odwiedzonych węzłów dla losowo wygenerowanych problemów.

Inne problemy

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Innymi znanymi problemami dla których łatwo napisać
algorytm z powrotami:

- kolorowanie grafu
- cykl hamiltona

Szacowanie złożoności algorytmów

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1
Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Możliwe metody:

- Standardowe liczenie złożoności obliczeniowej.
- Szacowanie wydajności algorytmem Monte Carlo

Kiedy można użyć Monte Carlo?

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1
Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

- We wszystkich węzłach na tym samym poziomie drzewa stanów powinna być używana ta sama funkcja określająca, czy węzeł jest obiecujący.
- Węzły na tym samym poziomie w drzewie przestrzeni stanów muszą mieć taką samą liczbę potomków.

Monte Carlo

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1
Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

- m_0 - liczba obiecujących potomków korzenia
- Wylosuj jeden z obiecujących potomków korzenia. Niech m_1 będzie liczbą jego obiecujących potomków.
- Wylosuj jeden z obiecujących potomków węzła z poprzedniego kroku. Niech m_2 będzie liczbą jego obiecujących potomków.
- ...

Algorytm działa dopóki wylosowany węzeł nie ma obiecujących potomków.

Monte Carlo

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1
Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Niech:

t_i - całkowita liczba potomków węzła na poziomie i .

Wynik oszacowania złożoności to:

$$1 + t_0 + m_0 t_1 + m_0 m_1 t_2 + \dots + m_0 m_1 \dots m_{i-1} t_i + \dots$$

Algorytm najlepiej uruchamiać wielokrotnie uśredniając otrzymane wyniki.

Koniec

Algorytmy
z
powrotami

Andrzej
Kasiewicz

Wstęp

Idea
algorytmów
z
powrotami

Konstrukcja
algorytmów

Problem
n-hetmanów
Problem
sumy
podzbioru
Problem
plecakowy
0-1

Inne
problemy

Szacowanie
złożoności
algorytmów

Koniec

Dziękuję za uwagę