

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

METODA „DZIEL I ZWYCIĘŻAJ”

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [**] Dane są dwie posortowane n -elementowe tablice liczb oraz liczba całkowita k z zakresu $1 \leq k \leq 2n$. Opisz algorytm znajdowania k -tej co do wielkości liczby spośród liczb zapisanych w obu tablicach. Czas działania twojego algorytmu powinien być rzędu $O(\log n)$. Uzasadnij jego poprawność.
2. [**] Jak uogólnić algorytm mnożenia długich liczb metodą „dziel i zwyciężaj”, aby długości liczb nie musiały być potęgami 2, a także by ich długości mogły być różne.
Uwaga. W zadaniu nie chodzi o to, by dopisać tyle zer, aby długości liczb powiększyły się do potęg 2.
3. [**] Niech dane będą dwie długie liczby w systemie d -arnym: jedna o długości m i druga o długości n . Załóżmy, że $m \leq n$. Gdy $m \simeq n$, to algorytm pisemny oblicza iloczyn takich liczb w czasie $O(n^2)$, a algorytm z wykładu oparty na technice „dziel i zwyciężaj” potrzebuje tylko $O(n^{\log 3})$ czasu. Ale gdy m jest znacznie mniejsze niż n , to również ten ostatni algorytm jest nie do zaakceptowania. Skonstruuj algorytm, który dla przypadku gdy $m \ll n$ będzie działał w czasie $O(n m^{\log \frac{3}{2}})$.
4. [***] Zmodyfikuj algorytm mnożenia długich liczb metodą „dziel i zwyciężaj” w ten sposób, aby liczba była dzielona na trzy części zamiast na dwie. Ile mnożeń krótszych liczb musisz wtedy wykonać? Jaka jest złożoność czasowa twojego algorytmu?
Uwaga. Asymptotyczny czas działania algorytmu z podziałem na trzy części powinien być lepszy niż z podziałem na dwie części.
5. [**] Jak zmodyfikować algorytm Strassena bez pogarszania jego asymptotycznej złożoności $O(n^{\log 7})$, aby mnożył macierze kwadratowe $n \times n$ metodą „dziel i zwyciężaj”, w których n nie jest potęgą 2? Jak uogólnić metodę Strassena, aby można nią było mnożyć macierze o rozmiarach $a \times b$ i $b \times c$ dla dowolnych $a, b, c \in \mathbf{N}$ i jaka jest wtedy złożoność tego algorytmu?
Uwaga. W pierwszej części zadania nie chodzi o to, by dopisać tyle zer, aby rozmiar macierzy powiększył się do liczby będącej potęgą 2.
Wskazówka. W drugiej części zadania rozważ najpierw przypadek, gdy a, b i c są potęgami 2. Zastanów się także, co należy zrobić w sytuacji, gdy a, b lub c ma wartość 1.
6. [**] Niech A będzie macierzą o wymiarach $kn \times n$ a B macierzą o wymiarach $n \times kn$, gdzie $k \in \mathbf{N}$. Jak szybko można obliczyć iloczyn $A \cdot B$ korzystając z algorytmu Strassena? O ile lepszy jest ten wynik od tradycyjnego mnożenia macierzy? Odpowiedz na te same pytania dla iloczynu $B \cdot A$.
7. [**] Wyznacz wartość progową (*threshold*) opłacalności stosowania algorytmu mnożenia długich liczb metodą „dziel i zwyciężaj” z podziałem na dwie części w stosunku do pisemnego algorytmu mnożenia długich liczb „po rosyjsku”. Za operacje dominujące przyjmij działania arytmetyczne na pojedynczych cyfrach (dodawanie, odejmowanie i mnożenie).
8. [**] Wyznacz wartość progową (*threshold*) opłacalności stosowania algorytmu Strassena w stosunku do tradycyjnego algorytmu mnożenia macierzy. Za operacje dominujące przyjmij działania arytmetyczne na elementach macierzy (dodawanie, odejmowanie i mnożenie).