ćwiczenia (licencjat wieczorowy): lista zadań nr 12 *8 stycznia 2008 r.*

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

ZŁĄCZALNE KOLEJKI PRIORYTETOWE, ZBIORY ROZŁĄCZNE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego *Paweł Rzechonek*

1. [$*$] Zbadaj związek między wstawianiem elementu do kopca dwumianowego a inkrementacją liczby całkowitej w zapisie binarnym oraz związek między łączeniem kopców dwumianowych a dodawaniem liczb całkowitych w zapisie binarnym.

2. [$*$] Wykaż, że w drzewie dwumianowym stopnia k, które zawiera 2^k węzłów, długość ścieżki od korzenia do dowolnego węzła w tym drzewie jest nie większa niż k.

3. [$**$] Jak zaimplementować drzewo dwumianowe k–tego stopnia w tablicy 2^k elementowej? Twoje rozwiązanie powinno pozwalać na łatwe łączenie dwóch drzew dwumianowych. Napisz wzory pozwalające ustalić na podstawie indeksu w tablicy numer poziomu, na którym węzeł się znajduje, jego stopień oraz indeksy ojca, brata i kolejnych synów.

4. [$***$] Dane jest drzewo dwumianowe stopnia k, które zawiera 2^k węzłów. W drzewie tym jest zachowany porządek kopcowy. Następnie zmieniamy w dowolnym wybranym węźle pamiętaną w nim wartość. Porządek kopcowy może więc zostać zaburzony. Jeśli zmienimy wartość na większą, to zwykłe *sianie w górę* przywróci ten porządek w $O(\log n)$ krokach, a więc w akceptowalnym czasie. Jeśli natomiast zmienimy wartość na mniejszą, to przywrócenie porządku kopcowego poprzez proste *sianie w dół* będzie działać istotnie dłużej ($O(\log^2 n)$ kroków). Opracuj metodę, która po zmianie wartości na mniejszą we wskazanym elemencie przywróci porządek kopcowy w czasie $O(\log n)$.

5. [$*$] Zaimplementuj operacje *union* i *find* dla drzewiastej reprezentacji zbiorów rozłącznych ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek. Twoje procedury mają działać w miejscu (bez używania rekurencji).

6. [$*$] Dana jest rodzina n jednoelementowych zbiorów rozłącznych. Zbiory te będziemy pamiętali w postaci drzewiastej ze zbalansowanym łączeniem. Skonstruuj ciąg $n-1$ operacji *union*, by w ich wyniku powstał jeden zbiór reprezentowany przez n elementowe drzewo o wysokości $\lfloor \log n \rfloor$.

7. [$**$] Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ z ważonymi krawędziami. Jak za pomocą operacji na zbiorach rozłącznych wyznaczyć minimalne drzewo rozpinające grafu? Omów algorytm rozwiązujący to zadanie i przeanalizuj jego złożoność. Ile razy nastąpi wywołanie *find()* a ile razy *union()* (odpowiedź uzależnij od wielkości $|V|$ i $|E|$)?

8. [$**$] Zaprojektuj efektywną strukturę danych do wykonywania ciągów podanych operacji na dynamicznie zmieniającym się podziale zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$:

   - `init()` — utworzenie podziału $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$;
   - `union(A,B)` — połączenie zbiorów A i B bieżącego podziału w jeden zbiór;
   - `find(x)` — wyznaczenie zbioru, do którego należy element x;
   - `find-smallest()` — wyznaczenie zbioru bieżącego podziału, który ma najmniej elementów.

   Pesymistyczna złożoność tych operacji powinna być rzędu $O(\log n)$.

9. [$***$] Niech dany będzie ciąg m instrukcji *union* i *find*, w którym wszystkie instrukcje *union* występują przed instrukcjami *find*. Udowodnij, że koszt czasowy wykonania tych operacji na drzewiastych strukturach reprezentujących zbiory rozłączne ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek wynosi $\Theta(m)$.