

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

SORTOWANIE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego

Paweł Rzechonek

1. [**] Jakie jest dokładne dolne ograniczenie na liczbę porównań dla algorytmu sortującego 5 elementów? Podaj algorytm, który posortuje 5-elementową tablicę tylko przy pomocy porównań i zamian, i który wykona nie więcej porównań niż to wynika z dolnej granicy.
2. [**] Wykaż, że algorytm *sortowania bąbelkowego* na ciągu n -elementowym wykona liniową liczbę zamian elementów w przypadku (choćby liczba porównań zawsze będzie kwadratowa), gdy liczba inwersji związanych z każdym elementem jest rzędu $O(1)$.
3. [***] Bedziemy uruchamiać algorytm *sortowania bąbelkowego* na n -elementowych ciągach. Rozważmy trzy szczególne przypadki takich ciągów:
 - (a) ciąg posortowany (0 inwersji);
 - (b) ciąg posortowany, w którym zamieniono miejscami parę elementów, pierwszy położony blisko początku a drugi blisko końca tablicy (w przypadku zamiany elementu pierwszego z ostatnim liczba inwersji wyniesie $2n - 3$);
 - (c) wewnątrz posortowanego ciągu wyróżniono blok rozmiaru $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$, w którym odwrócono kolejność elementów (liczba inwersji wyniesie $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor \cdot (\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1)}{2}$).Dokonaj takiej modyfikacji w algorytmie sortowania bąbelkowego, która spowoduje, że dla wymienionych przypadków będzie on działał w czasie liniowym $O(n)$.
4. [**] Wykaż, że algorytm *sortowania przez wstawianie* na ciągu n -elementowym wykona liniową liczbę porównań i zamian (będzie działał w liniowym czasie), gdy całkowita liczba inwersji w sortowanym ciągu jest rzędu $O(n)$.
5. [***] W posortowanym ciągu dokonujemy losowej transpozycji (zamiany pary elementów miejscami). Ile porównań elementów w średnim przypadku wykona algorytm *sortowania przez wstawianie*, gdy uruchomimy go na takim ciągu?
6. [**] Dana jest prostokątna tablica elementów, które możemy porównywać za pomocą relacji $\leq$. W tablicy tej najpierw sortujemy wszystkie wiersze, a potem wszystkie kolumny. Wykaż, że po posortowaniu kolumn wiersze nadal pozostaną posortowane.
7. [***] Dany jest n -elementowy ciąg elementów, które możemy porównywać za pomocą relacji $\leq$, oraz dwie liczby naturalne p i q , takie że $1 < p < q < n$. Na ciągu tym wykonujemy najpierw q -sortowanie, a potem p -sortowanie. Wykaż, że po wykonaniu p -sortowania ciąg ten będzie nadal q -posortowany.