ćwiczenia (licencjat dzienny): lista zadań nr 10 *18 grudnia 2006 r.*

ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

ZBIORY ROZŁĄCZNE

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego *Paweł Rzechonek*

1. [$*$] Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ złożony z k spójnych składowych. Dla grafu tego wywołano następującą procedurę obliczającą liczbę składowych spójności:

```
function CONECTED-COMPONENTS (graph G) ↦ int
{
    DisjointSets S;
    S.init(G.V);
    for-each (u, v) ∈ G.E do
    {
        x ← S.find(u);
        y ← S.find(v);
        if x ≠ y then S.union(x, y);
    }
    return S.count-sets();
}
```

   Ile razy nastąpi wywołanie *find* a ile razy *union*? Odpowiedź uzależnij od wielkości $|V|$, $|E|$ oraz k.

2. [$**$] Dany jest graf nieskierowany $G = (V, E)$ z ważonymi krawędziami. Jak za pomocą operacji na zbiorach rozłącznych wyznaczyć minimalne drzewo rozpinające grafu? Omów algorytm rozwiązujący to zadanie i przeanalizuj jego złożoność. Ile razy nastąpi wywołanie *find()* a ile razy *union()*? Odpowiedź uzależnij od wielkości $|V|$ i $|E|$.

3. [$**$] Zaproponuj efektywną strukturę danych do wykonywania ciągów podanych operacji na dynamicznie zmieniającym się podziale zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$:

   - `init()` — utworzenie podziału $\{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$;
   - `union(A,B)` — połączenie zbiorów A i B bieżącego podziału w jeden zbiór;
   - `find(x)` — wyznaczenie zbioru, do którego należy element x;
   - `find-smallest()` — wyznaczenie zbioru bieżącego podziału, który ma najmniej elementów.

   Pesymistyczna złożoność tych operacji powinna być rzędu $O(\log n)$?

4. [**] Zaimplementuj operacje *union* i *find* dla drzewiastej reprezentacji zbiorów rozłącznych ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek. Twoje procedury mają działać w miejscu (bez używania rekurencji).

5. [*] Dana jest rodzina n jednoelementowych zbiorów rozłącznych. Zbiory te będziemy pamiętali w postaci drzewiastej ze zbalansowanym łączeniem. Skonstruuj ciąg $n-1$ operacji *union*, by w ich wyniku powstał jeden zbiór reprezentowany przez n elementowe drzewo o wysokości $\lfloor \log n \rfloor$.

6. [***] Niech dany będzie ciąg m instrukcji *union* i *find*, w którym wszystkie instrukcje *union* występują przed instrukcjami *find*. Udowodnij, że koszt czasowy wykonania tych operacji na drzewiastych strukturach reprezentujących zbiory rozłączne ze zbalansowanym łączeniem i kompresją ścieżek wynosi $\Theta(m)$.

7. [***] Operacja *extract(i)* ma usuwać element i-ty ze zbioru, do którego on aktualnie należy i tworzyć nowy jednoelementowy zbiór $\{i\}$. Podaj implementację operacji *extract*, która pozwoli na wykonanie ciągu m instrukcji *union*, *find* i *extract* na n-elemetowym zbiorze danych w czasie $O(m \log^* n)$.