Ćwiczenia: lista zadań nr 4 *25 października 2005*

Algorytmy i Struktury Danych

metoda "dziel i zwyciężaj"

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego *Paweł Rzechonek*

1. [∗∗∗] Czas działania podanego na wykładzie algorytmu jednoczesnego znajdowania minimum i maksimum w zadanym n-elementowym zbiorze należy do$\Theta(\log n)$. Trudno jest wyznaczyć stały czynnik ukryty pod operatorem Θ, gdyż zależy on od konkretnej wartości n.

   (a) Pokaż, że dla n postaci 2^k, liczba wykonywanych przez algorytm porównań wynosi $C(n) = \frac{3}{2}n - 2$.

   (b) Pokaż, że dla n postaci $3 \cdot 2^k$, liczba wykonywanych przez algorytm porównań wynosi $C(n) = \frac{5}{3}n - 2$.

   (c) Oszacuj liczbę wykonywanych przez algorytm porównań dla dowolnych wartości n: $\lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil \leq C(n) \leq \lfloor \frac{5}{3}n - 2 \rfloor$.

2. [∗∗] Zmodyfikuj podany na wykładzie algorytm jednoczesnego znajdowania minimum i maksimum w zadanym n-elementowym zbiorze, tak aby liczba wykonywanych przez ten algorytm porównań wynosiła zawsze $C(n) = \lceil \frac{3}{2}n - 2 \rceil$.

3. [∗∗∗] Zmodyfikuj podany na wykładzie algorytm mnożenia długich liczb metodą "dziel i zwyciężaj", w taki sposób aby liczba była dzielona na trzy części zamiast na dwie. Ile mnożeń krótszych liczb musisz wtedy wykonać? Jaka jest złożoność czasowa twojego algorytmu (algorytm ten powinien być konkurencyjny w stosunku do tego, który dzieli liczbę na dwie części)?

4. [∗∗∗] Niech dane będą dwie długie liczby: jedna o długości m, druga o długości n. Załóżmy, że $m \leq n$. Algorytm pisemny oblicza iloczyn takich liczb w czasie $O(mn)$; algorytm z wykładu oparty na technice "dziel i zwyciężaj" potrzebuje tylko $O(n^{\log 3})$ czasu, ale i to jest nie do zaakceptowania gdy m jest znacznie mniejsze niż n. Skonstruuj algorytm, który dla takiego przypadku będzie działał w czasie $O(nm^{\log \frac{3}{2}})$.

5. [∗∗∗] Macierz kwadratową M rozmiaru $n \times n$ nazywamy *macierzą Toeplitza*, jeśli jej elementy spełniają równanie $M[i,j] = M[i-1, j-1]$ dla $1 < i, j \leq n$.

   (a) Zaproponuj reprezentację macierzy Toeplitza, pozwalającą dodawać dwie takie macierze w czasie $O(n)$.

   (b) Podaj algorytm, oparty na metodzie "dziel i zwyciężaj", mnożenia macierzy Toeplitza przez wektor, działający poniżej czasu kwadratowego $o(n^2)$.

Za operacje dominujące przyjmij operacje arytmetyczne (dodawanie i mnożenie) wykonywane na pojedynczych elementach macierzy/wektora.

6. [$*****$] Udowodnij, że każdy algorytm wyznaczający jednocześnie element największy i drugi co do wielkości w zbiorze n-elementowym wykona co najmniej $\lceil n + \log n - 2 \rceil$ porównań. Zakładamy, że elementy tego zbioru możemy jedynie porównywać. Wyznaczając dolną granicę dla tego problemu, wykorzystaj technikę "gry z adwersarzem".