Ćwiczenia: lista zadań nr 1 *4 października 2005*

# Algorytmy i Struktury Danych

## szacowanie złożoności obliczeniowej

Instytut Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego *Paweł Rzechonek*

1. Dane są dwa algorytmy $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_2$, które rozwiązują ten sam problem $\mathcal{P}$. Dla danych o rozmiarze $n$ algorytm $\mathcal{A}_1$ działa w czasie $f_1(n)$, a algorytm $\mathcal{A}_2$ w czasie $f_2(n)$:

   (a) [$*$] $f_1(n) = 16n$, $f_2(n) = n \log n$;

   (b) [$*$] $f_1(n) = n\sqrt{n}$, $f_2(n) = 10n$;

   (c) [$*$] $f_1(n) = 100n^2$, $f_2(n) = 2^n$;

   (d) [$*$] $f_1(n) = n!$, $f_2(n) = 256n^3$;

   Dla jakich wartości $n$ bardziej opłaca się stosować algorytm pierwszy, a dla jakich drugi?

2. [$**$] Dysponujemy komputerem, który wykonuje miliard operacji na sekundę. Na komputerze tym uruchamiamy programy o różnej złożoności czasowej zależnej od rozmiaru danych. Wypełnij tabelkę określając największy rozmiar danych $n$, dla których program wykona obliczenia w zadanym czasie.

| złożoność programu | sekunda | minuta | godzina | dzień |
|---|---|---|---|---|
| $\log n$ | | | | |
| $\sqrt{n}$ | | | | |
| $n$ | | | | |
| $n \log n$ | | | | |
| $n^2$ | | | | |
| $2^n$ | | | | |
| $n!$ | | | | |

3. [$*$] Dane są dwa algorytmy sortujące ciągi $n$-elementowe: *BubbleSort* działający w czasie $\frac{1}{2}n^2$ i *MergeSort* działający w czasie $2n \log n$. Dla danych jakiego rozmiaru *BubbleSort* jest szybszy niż *MergeSort*? Jak można połączyć te algorytmy, by przyspieszyć sortowanie?

4. Niech dane będą funkcje $f, g : \mathbf{N} \mapsto \mathbf{R}_+$. Korzystając z podstawowej definicji notacji $\Theta$ (przypomnij ją), udowodnij:

   (a) [$*$] $\max(f(n), g(n)) \in \Theta(f(n) + g(n))$;

   (b) [$*$] $\min(f(n), g(n)) \in \Theta(\frac{f(n)g(n)}{f(n)+g(n)})$;

5. [$*$] Pokaż, że dla dowolnych stałych $a, b, c \in \mathbf{R}_+$ zachodzi $(an+b)^c \in \Theta(n^c)$.

6. [$*$] Czy $2^{n+1} \in O(2^n)$? A czy $2^{2n} \in O(2^n)$?

7. [$*$] Czy $\log \sqrt{n} \in \Omega(\log n)$? A czy $\log \sqrt[n]{n} \in \Omega(\log n)$?

8. [$*$] Udowodnij, że $\log n! \in \Theta(n \log n)$.

9. [$*$] Pokaż, że funkcja $|n^2 \cdot \sin \frac{n\pi}{2}|$ nie należy ani do $O(n)$ ani do $\Omega(n)$.

10. [$*$] Korzystając z definicji $o$ i $\omega$ pokaż, że funkcja $5n^2 + 3n$ należy do $o(n^3)$, ale nie należy do $\omega(n^3)$.