Logika dla informatyków

Lista zadań nr 9

17 grudnia 1999

Zadanie 1. Które z poniższych formuł są (a) tautologiami, (b) formułami spełnialnymi, (c) formułami sprzecznymi?

1. $p \vee q \vee r \Rightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q)$
2. $((p \vee q) \wedge \neg r) \vee (r \wedge p \wedge q) \Rightarrow p \vee q \vee r$

Zadanie 2. Które z poniższych formuł są (a) tautologiami, (b) formułami spełnialnymi, (c) formułami sprzecznymi?

1. $((p \vee q) \Leftrightarrow (r \vee s)) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s))$
2. $((p \Leftrightarrow r) \vee (q \Leftrightarrow s)) \Rightarrow ((p \vee q) \Leftrightarrow (r \vee s))$
3. $((p \wedge q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) \Rightarrow ((p \Leftrightarrow r) \wedge (q \Leftrightarrow s))$

Niech Z oznacza zbiór wszystkich formuł rachunku zdań (zakładamy że zbiór zmiennych zdaniowych V jest przeliczalny i $V = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$) i niech φ_a będzie ustaloną formułą. W zbiorze formuł zdaniowych Z wprowadzamy relację $\sim$ taką, że $\phi_1 \sim \phi_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_a \Rightarrow (\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2)$ jest tautologią.

Zadanie 3. Opisz klasy równoważności formuł $p \vee \neg p$ i $p \wedge \neg p$.

W zbiorze klas abstrakcji $Z/_\sim$ relacji równoważności $\sim$ wprowadzamy relację $\leqslant$ taką, że $[\varphi_1]_\sim \leqslant [\varphi_2]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_a \Rightarrow (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ jest tautologią.

Zadanie 4. Wykaż że $\langle Z/{\sim}, \leqslant\rangle$ jest kratą.

Zadanie 5. Znajdź w $\langle Z/_\sim, \leqslant\rangle$ nieskończony podzbiór liniowo uporządkowany.

Jeśli $X \subseteq A$ i $\langle A, \leqslant\rangle$ jest częściowym porządkiem, to X jest antyłańcuchem, jeśli $\neg(x \leqslant y)$ oraz $\neg(y \leqslant x)$, dla każdych $x \neq y, x, y \in X$.

Zadanie 6. Znajdź w $\langle Z/_\sim, \leqslant\rangle$ nieskończony antyłańcuch.

W zbiorze formuł zdaniowych Z_n zbudowanych jedynie ze zmiennych $p_1, \ldots, p_n$ określamy relację $\sim$ następująco: $\varphi \sim \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \Leftrightarrow \psi$ jest tautologią. W zbiorze ilorazowym $Z_n/{\sim}$ określamy relację $\leqslant$ następująco: $[\varphi]_\sim \leqslant [\psi]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi \Rightarrow \psi$ jest tautologią.
Wiemy, że $\sim$ jest relacją równoważności, definicja $\leqslant$ jest poprawna i $\leqslant$ jest częściowym porządkiem.

Zadanie 7. Ile jest elementów minimalnych w $Z_n/{\sim} \setminus [\bot]_\sim$?

Zadanie 8. Ile elementów ma $Z_n/{\sim}$?

Zadanie 9. Dane są dwie funkcje $f : A \to B$ i $g : B \to A$, obie typu „na”, tj. są projekcjami.

1. Czy z powyższych założeń wynika, że f i g są bijekcjami?
2. Jeśli dodatkowo A i B są zbiorami skończonymi, to czy wówczas f i g są bijekcjami?

Zadanie 10. Niech $\{A_{n,m}\}_{n,m=1}^{\infty}$ będzie rodziną zbiorów indeksowaną parami liczb naturalnych. Pokaż, że jeśli

$$A_{n,m} \subseteq A_{n+1,m} \cap A_{n,m+1}$$

dla wszelkich n i m, to

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,n}.$$