# Logika dla informatyków

Lista zadań nr 8

10 grudnia 1999

Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Określamy relację $\preceq$ na $A^*$ w następujący sposób: jeśli $u, w \in A^*$ to $u \preceq w$ wtedy i tylko wtedy, gdy $u$ jest przedrostkiem $w$ lub istnieje $i \leq \min(|u|, |w|)$ takie, że dla $j < i$ zachodzi $u(j) = w(j)$ oraz $u(i) < w(i)$. Relację $\preceq$ nazywamy porządkiem leksykograficznym na $A^*$ generowanym przez $\leq$.

**Zadanie 1.** Wykazać, że $\preceq$ jest relacją przechodnią.

**Zadanie 2.** Wykazać, że $\preceq$ jest relacją antysymetryczną.

**Zadanie 3.** Wykazać, jeśli $\langle A, \leq \rangle$ jest porządkiem liniowym, to $\langle A, \preceq \rangle$ jest też porządkiem liniowym.

Nieskończonym łańcuchem wstępującym w zbiorze uporządkowanym $\langle A, \leq \rangle$ nazywamy ciąg $\{a_i : i \in N\}$ taki, że $(\forall i \in N)(a_i < a_{i+1})$. Podobnie ciąg $\{a_i : i \in N\}$ jest łańcuchem zstępującym, jeśli $(\forall i \in N)(a_{i+1} < a_i)$, gdzie $a < b$ oznacza, że $a \leq b$ i $a \neq b$.

**Zadanie 4.** Wykazać, że jeśli $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$ jest zbiorem uporządkowanym leksykograficznie nad zbiorem $\langle \{0, 1\}, \leq \rangle$, gdzie $0 \leq 1$, to w $\langle \{0, 1\}^*, \preceq \rangle$ można znaleźć nieskończony łańcuch wstępujący i nieskończony łańcuch zstępujący.

**Zadanie 5.** Niech $A$ będzie zbiorem niepustym oraz niech $\langle B, \leq_B \rangle$ będzie porządkiem częściowym. Wykazać, że $\langle B^A, \leq \rangle$ jest porządkiem częściowym, gdzie $f \leq g$ dla $f, g \in B^A$, wtedy i tylko wtedy, gdy $(\forall a \in A)(f(a) \leq_B g(a))$.

**Zadanie 6.** W klasie jest $2n$ dzieci i $n$ dwuosobowych ławek. Wykazać przez indukcję, że dzieci można podzielić w pary na $\frac{(2n)!}{2^n}$ sposobów i rozsadzić w ławkach na $n!\frac{(2n)!}{2^n}$ sposobów.

**Zadanie 7.** Skończony zbiór liniowo uporządkowany $\langle A, \leq_1 \rangle$ ma $n$ elementów a zbiór uporządkowany $\langle B, \leq_2 \rangle$ ma 2 elementy. Na ile sposobów można porządek liniowy na $A$ rozszerzyć o elementy zbioru $B$ (to znaczy znaleźć porządek liniowy $\langle A \cup B, \leq \rangle$, taki że $(a_1 \leq_1 a_2) \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2)$, dla $a_1, a_2 \in A$ oraz $(b_1 \leq_2 b_2) \Leftrightarrow (b_1 \leq b_2)$, dla $b_1, b_2 \in B$). Odpowiedź uzasadnić przy pomocy dowodu przez indukcję.

**Zadanie 8.** Wykaż indukcyjnie, że dla każdego $n$ formuła zdaniowa

$$\Big(p_1 \Rightarrow (p_2 \Rightarrow (p_3 \Rightarrow \cdots (p_{n-1} \Rightarrow p_n) \cdots))\Big) \iff \Big((p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_{n-1}) \Rightarrow p_n\Big)$$

jest tautologią.

**Zadanie 9.** Wykaż, że dla każdego $n$ poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\left(\bigwedge_{i=1}^{n} (\alpha_i \Rightarrow \beta_i)\right) \Rightarrow \left(\left(\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \Rightarrow \left(\bigvee_{i=1}^{n} \beta\right)\right)$$

gdzie $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$ oznacza $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n$, zaś $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$ oznacza $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_n$.

**Zadanie 10.** Wykaż, że dla każdego $n$ poniższa formuła zdaniowa jest tautologią:

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} (\alpha_i \Rightarrow \beta)\right) \Rightarrow \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i\right) \Rightarrow \beta\right)$$