Logika dla informatyków

Lista zadań na ćwiczenia nr 7

26 listopada 1999

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $\sim$ jest relacją równoważności w zbiorze przeliczalnym A to zbiór klas równoważności $A/_\sim = \{[a]_\sim : a \in A\}$ jest przeliczalny.

Zadanie 2. Wiadomo, że $\sim$ jest relacją równoważności na zbiorze A, zbiór klas równoważności $A/_\sim$ jest przeliczalny oraz dla każdego $a \in A$, klasa równoważności $[a]_\sim$ elementu a jest przeliczalna. Wykazać, że zbiór A jest przeliczalny.

Zadanie 3.

a) Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze 4 elementowym.

b) Ile jest różnych relacji równoważności na zbiorze 6 elementowym.

Zadanie 4. Czy zbiór relacji równoważności na zbiorze przeliczalnym jest zbiorem przeliczalnym?

Zadanie 5. Dany jest przeliczalny zbiór A. Ile jest klas równoważności $\sim$ na zbiorze A takich, że dla każdego $a \in A$

a) $[a]_\sim$ ma dokładnie 3 elementy,

b) $[a]_\sim$ ma dokładnie 13 elementów,

b) $[a]_\sim$ ma dokładnie n elementów ($n \in \mathbb{N}$).

Zadanie 6. Ile jest klas równoważności na przeliczalnym zbiorze A takich, że dla każdego $a \in A$, $[a]_\sim$ jest zbiorem skończonym?

Zadanie 7. Ile jest rosnących ciągów liczb wymiernych zbieżnych do 1 ?

Zadanie 8. Udowodnić, że zbiór liczb wymiernych jest przeliczalny.

Zadanie 9. Wykazać, że zbiór funkcji słabo rosnących $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest nieprzeliczalny
(funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest słabo rosnąca, jeśli $(\forall x \forall y)(x > y \Rightarrow f(x) \geq f(y))$).

Zadanie 10. Wykazać, że zbiór słabo malejących funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest przeliczalny
(funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest słabo malejąca, jeśli $(\forall x \forall y)(x > y \Rightarrow f(x) \leq f(y))$).

Zadanie 11. Przez indukcję wykazać, że dla każdego zbioru A mocy $n \in \mathbb{N}$ istnieje $n!$ bijekcji $f : A \to A$
($0! = 1,\ (n+1)! = n! \cdot n$).

Zadanie 12. Ile jest bijekcji $f : A \to A$, gdy zbiór A jest przeliczalny?