Logika dla informatyków

Lista zadań na ćwiczenia nr 6

19 listopada 1999

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli $|A| = n$ oraz $|B| = m$, to $|A^B| = n^m$.

Zadanie 2. Kładziemy $A^1 = A$ oraz $A^{n+1} = A^n \times A$. Wykazać, że $A^{\underline{n}} \sim A^n$. Zinterpretować to twierdzenie.

Zadanie 3. Niech $A_1 \sim B_1$ i $A_2 \sim B_2$. Czy:

1. $A_1 \times A_2 \sim B_1 \times B_2$
2. $A_1 \cap A_2 \sim B_1 \cap B_2$
3. $A_1 \cup A_2 \sim B_1 \cup B_2$
4. Czy odpowiedzi na powyższe pytania ulegną zmianie, jeśli założymy, że jeden ze zbiorów A_1, A_2 jest nieskończony. Co sie stanie, jeśli założymy, że oba są nieskończone?

Zadanie 4. Czy $\sim$ zachowuje porządek liczb kardynalnych, tj. czy $A_1 \sim A_2$, $B_1 \sim B_2$ i $|A_1| \leq |B_1|$, implikuje że $|A_2| \leq |B_2|$?

Zadanie 5. Wykazać że jeśli $A_1 \sim A_2$, to $B^{A_1} \sim B^{A_2}$ oraz jeśli $B_1 \sim B_2$, to $B_1^A \sim B_2^A$.

Zadanie 6. Wykazać że $(A^B)^C \sim A^{(B \times C)}$. Zinterpretować to twierdzenie.

W poniższych zadaniach napisz odpowiednie formuły logiczne *nie używając znaku negacji*.

Zadanie 7. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest *ciągła*, jeśli

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}.\forall \epsilon > 0.\exists \delta > 0.\forall x.(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon)$$

Zapisz formułę „funkcja f nie jest ciągła."

Zadanie 8. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą* (w sensie Cauchy'ego) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall \epsilon > 0.\exists \delta > 0.(0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \epsilon)$$

Zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0."

Zadanie 9. Liczba $g \in \mathbb{R}$ jest *granicą* (w sensie Heinego) funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ w punkcie x_0, jeśli

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}.(\lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \wedge \forall n.x_n \neq x_0) \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = g$$

Zapisz formułę „liczba g nie jest granicą funkcji f w punkcie x_0."