Logika dla informatyków

Lista zadań na ćwiczenia nr 5

5 listopada 1999

Zadanie 1. Dane jest przekształcenie $f : A \to B$ oraz relacja rownoważności R na B. W zbiorze A definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$x \sim y \iff R(f(x), f(y))$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności.

Zadanie 2. Ile jest funkcji logicznych n-argumentowych?

Mówimy, że funkcja dwuargumentowa $f : A \times B \to C$ istonie zależy od każdego z argumentów jeśli $(\forall a \exists b_1, b_2)(f(a,b_1) \neq f(a,b_2))$ oraz $(\forall b \exists a_1, a_2)(f(a_1,b) \neq f(a_2,b))$.

Zadanie 3. Ile jest dwuargumentowych funkcji logicznych istotnie zależących od każdego z argumentów. Ile jest funkcji $f : A \times B \to C$ istotnie zależących od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów A, B, C ma 3 elementy.

Zadanie 4. Ile jest funkcji $f : A \times B \to C$ istotnie zależących od każdego z argumentów, gdy każdy ze zbiorów A, B ma 4 elementy a C ma n elementów.

Zadanie 5. Rodzina $\{A_i\}_{i=1}^n$ jest rodzina zbiorów k-rozłącznych, jeśli dla każdego rosnącego ciągu $\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle$ liczb naturalnych $\leq n$ mamy $\bigcap_{j=1}^k A_{i_j} = \emptyset$. Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych k-rozłącznych $\{A_i\}_{i=1}^n$ prawdziwy jest wzór:

$$|\bigcup_{i=1}^n A_i| = \sum_{j=1}^k \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = j}} (-1)^{j+1} |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Zadanie 6. (2 pkt.) *Inwolucją* nazywamy odwzorowanie $f : A \to A$, takie że ff jest identycznością na A. Czy inwolucja musi być bijekcją? Pokaż że każdą bijekcję na A można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji na A (tj. że dla każdej bijekcji $g : A \to A$ istnieją inwolucje $f_1, f_2 : A \to A$, takie że $g = f_1 f_2$).

Zadanie 7. Udowodnij że każdy zbiór rozłącznych kół na płaszczyźnie jest przeliczalny. Pokaż, że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych okręgów na płaszczyźnie (koło to zbiór punktów $\langle x, y \rangle$ spełniających warunek $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r$ dla pewnygo punktu $\langle x_0, y_0 \rangle$ i dodatniej liczby rzeczywistej r, a okrąg to zbior punktów postaci $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r$).

Zadanie 8. Czy zbiór nierosnących ciągów o wyrazach naturalnych jest przeliczalny? (ciąg $\langle a_i, i \in \mathbb{N} \rangle$ jest nierosnący, jesli $a_i \leq a_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$).

Zadanie 9. Udowodnij że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zstępującą rodziną zbiorów*, tj. $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n+1} \setminus A_{2n+2}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \\ = A_0 \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n} \setminus A_{2n+1})$$

Zadanie 10. Konstruując odpowiednie bijekcje udowodnij, że następujące trzy zbiory są równoliczne:

- odcinek otwarty $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$;
- odcinek domknięto-otwarty $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$;
- okrąg na płaszczyźnie o środku $(0,0)$ i promieniu 1.