Logika dla informatyków

Lista zadań na ćwiczenia nr 4

29 października 1999

Zadanie 1. Dane jest przekształcenie $f : A \to B$. W zbiorze A definiujemy relację $\sim$ wzorem

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

Udowodnij, że $\sim$ jest relacją równoważności. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, by $\sim$ była identycznością na A.

Zadanie 2. Relacje R i S są relacjami równoważności na tym samym zbiorze. Czy $R \cup S$, $R \cap S$, $R \backslash S$, $R \dot{-} S$ też są relacjami równoważności?

W poniższych zadaniach udowodnij, że podane relacje $R \subseteq X \times X$ są relacjami równoważności. Opisz ich klasy abstrakcji.

Zadanie 3. $X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1 - y_1 = x_2 - y_2$$

Zadanie 4. $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,

$$\langle x_1, y_1 \rangle R \langle x_2, y_2 \rangle \iff x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2$$

Zadanie 5. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$,

$$ARB \iff |A \dot{-} B| \text{ jest zbiorem skończonym}$$

Zadanie 6. $X = \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$,

$$xRy \iff p \text{ dzieli } x - y$$

Zadanie 7. Udowodnij że każdy zbiór rozłącznych odcinków na prostej jest przeliczalny. Pokaż że istnieje nieprzeliczalny zbiór rozłącznych odcinków na płaszczyźnie.

Zadanie 8. Udowodnij że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest monotoniczna, to zbiór jej punktów nieciągłości jest przeliczalny.

Zadanie 9. Czy zbiór ciągów o wyrazach wymiernych, stałych od pewnego miejsca, jest przeliczalny?

Zadanie 10. Udowodnij że

$$A \times B = B \times A \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$$

dla dowolnych zbiorów A i B.

Zadanie 11. Dany jest zbiór X i jego podzbiór $C \subseteq X$. Czy relacja R określona na $\mathcal{P}(X)$ wzorem

$$ARB \iff A \dot{-} B \subseteq C$$

jest relacją równoważności? Jeśli tak, opisz jej klasy abstrakcji.

Zadanie 12. Udowodnij że jeśli $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ jest *zstępującą rodziną zbiorów*, tj. $A_{n+1} \subseteq A_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$, to

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n+1} \backslash A_{2n+2}) \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = A_0 \backslash \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_{2n} \backslash A_{2n+1})$$

Zadanie 13. Konstruując odpowiednie bijekcje udowodnij, że następujące trzy zbiory są równoliczne:

- odcinek otwarty $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$;
- odcinek domknięto-otwarty $[0,1) \subseteq \mathbb{R}$;
- okrąg na płaszczyźnie o środku $(0,0)$ i promieniu 1.