Logika dla informatyków

Lista zadań na ćwiczenia nr 3

22 października 1999

W poniższych zadaniach uzupełnij i udowodnij wzory.

Zadanie 1. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

Zadanie 2. $(A \cup B) \times C = ?$

Zadanie 3. $(A \cup B) \times (C \cup D) = ?$

Zadania 1–4. Niech $f : A \to B$, $g : B \to C$. Które z poniższych implikacji są prawdziwe?

1. Jeżeli gf jest „na", to f jest „na".
2. Jeżeli gf jest „na", to g jest „na".
3. Jeżeli gf jest różnowartościowa, to f jest różnowartościowa.
4. Jeżeli gf jest różnowartościowa, to g jest różnowartościowa.

Zadanie 8. (2 pkt.) *Inwolucją* nazywamy odwzorowanie $f : A \to A$, takie że ff jest identycznością na A. Czy inwolucja musi być bijekcją? Pokaż że każdą bijekcję na A można przedstawić jako złożenie dwóch inwolucji na A (tj. że dla każdej bijekcji $g : A \to A$ istnieją inwolucje $f_1, f_2 : A \to A$, takie że $g = f_1 f_2$).

Zadanie 9. Niech $f : X \to Y$, $A, B \subseteq X$. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl} f(A \cup B) & = & f(a) \cup f(B) \\ f(A \cap B) & ? & f(A) \cap f(B) \\ f^{-1}(f(A)) & ? & A \end{array}$$

Zadanie 10. Niech $f : X \to Y$, $C, D \subseteq Y$. Uzupełnij i udowodnij wzory:

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(C \cap D) & = & f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) \\ f^{-1}(C \cup D) & = & ? \\ f(f^{-1}(C)) & = & ? \end{array}$$

Zadanie 11. Niech $f : X \to Y$ będzie bijekcją, a $g : Y \to X$ funkcją odwrotną do f. Udowodnij że $f^{-1}(C) = g(C)$ dla dowolnego $C \subseteq Y$.

Zadanie 12. Udowodnij że na to, by relacja R była przechodnia, potrzeba i wystarcza, by

$$RR \subseteq R$$

Zadanie 13. Udowodnij że formuła rachunku zdań zbudowana wyłącznie ze zmiennych i spójnika równoważności „$\Leftrightarrow$" jest tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy każda zmienna występuje w niej parzystą ilość razy.

Zadanie 14. Ile jest relacji n-argumentowych na zbiorze 5-elementowym?