Logika dla informatyków

Lista zadań na ćwiczenia nr 2

15 października 1999

Jeśli nie zaznaczono inaczej, każde zadanie jest warte 1 punkt.

Zadanie 1. *Różnicę symetryczną* $\dot{-}$ zbiorów A i B definiujemy następująco:

$$x \in A \dot{-} B \iff x \in A \Leftrightarrow x \notin B$$

Pokaż że różnica symetryczna jest operacją *łączną* i *przemienną*, tj.

$$(A \dot{-} B) \dot{-} C = A \dot{-} (B \dot{-} C) \quad \text{oraz} \quad A \dot{-} B = B \dot{-} A$$

dla dowolnych zbiorów A, B i C.

Pokaż także następujące tożsamości:

$$A \dot{-} \emptyset = A \quad A \dot{-} A = \emptyset \quad A \cap (B \dot{-} C) = (A \dot{-} B) \cap (A \dot{-} C)$$

Zadanie 2. Liczbę elementów skończonego zbioru A będziemy oznaczać $|A|$. Jeżeli zbiory A i B są rozłączne, to $|A \cup B| = |A| + |B|$. Korzystając z powyższej własności udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B i C (niekoniecznie rozłącznych):

$$\begin{aligned} &|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \\ &|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| \\ &\qquad -|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Zadanie 3. (2 pkt.) Udowodnij indukcyjnie, że dla dowolnej rodziny zbiorów skończonych $\{A_i\}_{i=1}^n$ prawdziwy jest tzw. *wzór włączeń i wyłaczeń*:

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I| = j}} (-1)^j |\bigcap_{i \in I} A_i|$$

Zadanie 4. Pośród członków pewnego klubu lingwistycznego każdy uczy się francuskiego, niemieckiego lub hiszpańskiego. Wiadomo, że 20 uczy się francuskiego, 12 francuskiego i hiszpańskiego, 16 niemieckiego, 16 hiszpańskiego, 4 francuskiego i niemieckiego, 7 niemieckiego i hiszpańskiego, 3 wszystkich trzech języków. Ilu członków liczy klub? Ilu z nich uczy się dokładnie dwóch języków?

W poniższych zadaniach sprawdź, które z poniższych formuł rachunku predykatów są tautologiami.

Zadanie 5. $(\forall x.(\Phi(x) \vee \Psi(x))) \Rightarrow (\forall x.\Phi(x)) \vee (\forall x.\Psi(x))$

Zadanie 6. $(\forall x.(\Phi(x) \wedge \Psi(x))) \Rightarrow (\forall x.\Phi(x)) \wedge (\forall x.\Psi(x))$

Zadanie 7. $(\exists x.(\Phi(x) \vee \Psi(x))) \Rightarrow (\exists x.\Phi(x)) \vee (\exists x.\Psi(x))$

Zadanie 8. $(\exists x.\Phi(x)) \wedge (\exists x.\Psi(x)) \Rightarrow (\exists x.(\Phi(x) \wedge \Psi(x)))$

W poniższych zadaniach udowodnij, że dla dowolnych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t \in T}$, $\{B_t\}_{t \in T}$ i $\{A_{t,s}\}_{\substack{t \in T \\ s \in S}}$ zachodzą odpowiednie relacje.

Zadanie 9. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t) = \bigcup_{t \in T} A_t \cup \bigcup_{t \in T} B_t$

Zadanie 10. $\bigcup_{t \in T} (A_t \cap B_t) \subseteq \bigcup_{t \in T} A_t \cap \bigcup_{t \in T} B_t$

Zadanie 11. $\bigcap_{t \in T} A_t \cup \bigcap_{t \in T} B_t \subseteq \bigcup_{t \in T} (A_t \cup B_t)$

Zadanie 12. $\bigcup_{t \in T} \bigcap_{s \in S} A_{t,s} \subseteq \bigcap_{s \in S} \bigcup_{t \in T} A_{t,s}$

Zadanie 13. (2 pkt.) Udowodnij że każdy zbiór 2-zupełny jest zupełny.

Zadanie 14. Udowodnij, że zbiór $\{\vee, \wedge, \Rightarrow, \neg\}$ jest 2-zupełny.