Logika dla informatyków

Lista zadań nr 12

21 stycznia

Niech relacja $|\subset (\mathbb{N}\setminus\{0\})^2$ będzie określona następująco:

$$x|y \Leftrightarrow \exists z\in\mathbb{N}(xz=y)$$

Zadanie 1.

a) Udowodnić, że $|$ jest relacją częściowo porządkującą

b) znaleźć wszyskie elementy minimalne,

c) udowodnić, że w zbiorze $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$ nie ma elementów maksymalnych..

Zadanie 2.

a) Znaleźć ogólną postać łańcucha w zbiorze $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$,

b) znaleźć ogólną postać antyłańcucha w zbiorze $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$

c) udowodnić, że relacja inkluzji w zbiorze wszystkich łańcuchów zbioru $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},|\rangle$ jest częściowym porządkiem, znaleźć postać łańcuchów minimalnych i maksymalnych.

Zadanie 3. Czy dla danego $X\neq\varnothing$ można tak określić relację R, by równocześnie:

a) Zbiór $\langle X,R\rangle$ był częściowo uporządkowany,

b) R była relacją równoważności w X.

Zadanie 4. Czy dla danego zbioru X takiego, że $|X|\geqslant 2$ można określić relację R taką, by równocześnie:

a) zbiór $\langle X,R\rangle$ był liniowo uporządkowany

b) R była relacją równoważności.

Zadanie 5. Załóżmy, że zbiór $\langle X,R\rangle$ jest dobrze uporządkowany tzn. liniowo uporządkowany i regularny. Znaleźć warunek konieczny i dostateczny na to, by zbiór $\langle X,R^{-1}\rangle$ był także dobrze uporządkowany.

Zadanie 6. Znaleźć przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X,R\rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X,R\rangle$ jest dokładnie jeden element maksymalny i nie ma elementu największego.

Znaleźć przykład zbioru częściowo uporządkowanego $\langle X,R\rangle$ takiego, że w zbiorze $\langle X,R\rangle$ jest dokładnie jeden element minimalny i nie ma elementu najmniejszego.

Zadanie 7. W zbiorze $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ wprowadzamy relację R wzorem $xRy \Leftrightarrow (2|x\wedge 2|y\wedge y\leqslant x)\vee(2|x\wedge\neg(2|y))\vee(\neg(2|x)\wedge\neg(2|y)\wedge x\leqslant y)$. Udowodnić, że zbiór $\langle\mathbb{N}\setminus\{0\},R\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

Zadanie 8. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ wprowadzamy relację R wzorem

$$aRb\Leftrightarrow\forall n(a_n\leqslant b_n).$$

a) Udowodnić, że zbiór $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}},R\rangle$ jest częściowo uporządkowany, znaleźć elementy wyróżnione (minimalne, maksymalne, największy, najmniejszy).

b) czy zbiór ten jest uporządkowany liniowo?

Zadanie 9. W zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, wprowadzamy realcję S wzorem

$$aSb\Leftrightarrow\exists k\forall n<k(a_n=b_n\wedge a_k<b_k)\vee(a=b).$$

a) udowodnić, że zbiór $\langle\mathbb{N}^{\mathbb{N}},S\rangle$ jest liniowo uporządkowany.

b) udowodnić, że $\forall a,b(aRb\Rightarrow aSb)$, gdzie R jest relacją równoważną w zadaniu 8.

Element $x\in X$ nazywamy (bezpośrednim) *następnikiem* elementu y w zbiorze częściowo uporządkowanym $\langle X,R\rangle$ jeśli spełniony jest warunek

$$yRx\wedge\forall z[(yRz\wedge zRx)\Rightarrow(y=z\vee z=x)].$$

Zadanie 10. Udowodnić, że w zbiorze dobrze uporządkowanym każdy element (poza co najwyżej elementem największym) posiada następnik. Czy każdy element poza elementem pierwszym musi posiadać poprzednik.

Zadanie 11. Korzystając z twierdzenia o punkcie stałym udowodnić prawdziwość (pierwszego) twierdzenia o definiowaniu przez indukcję (patrz wykład 7).