Logika dla informatyków

Lista zadań nr 11

14 stycznia

Zadanie 1. Dowieść, że jeśli wyrazy ciągu spełniają warunki $a_0 = 2$, $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, to $a_n = 2^n + 1$.

Zadanie 2. Dany jest ciąg a_n taki,że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnić, że jeśli $n > 0$ to $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

Zadanie 3. Dany jest ciąg a_n taki,że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnić, że jeśli $n > 0$ to $a_n^2 = (-1)^{n+1} + a_{n-1}a_{n+1}$

Zadanie 4. Dany jest ciąg a_n taki,że $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Udowodnić, że jeśli $n > 0$ to $a_{2n+1} = a_n^2 + a_{n+1}^2$.

Zadanie 5. Udowodnić, że obszary wyznaczone przez dowolną skończoną liczbę prostych na płaszczyźnie można pokolorować dwoma kolorami tek, by żadne dwa o tym samym kolorze nie miały wspólnego boku.

Niech L będzie zbiorem słów (językiem) nad alfabetem $\{0,1\}$. Mówimy że dwa słowa $u, v \in \{0,1\}^*$ są *równoważne względem języka* L, lub krócej L-*równoważne*, co oznaczamy $u \sim_L v$, jeżeli

$$\forall x \in \{0,1\}^*. \ (ux \in L \iff vx \in L)$$

Zbiór klas równoważności relacji $\sim_L$ oznaczamy $\mathcal{Q}(L)$.

Zadanie 6. Wykaż że $\sim_L$ jest relacją równoważności.

Dla danego słowa w nad ustalonym alfabetem przez w^n oznaczamy słowo $\underbrace{ww\ldots w}_{n \text{ razy}}$. Formalnie

$$\begin{aligned} w^0 &= \varepsilon \\ w^{n+1} &= ww^n \end{aligned}$$

gdzie ε jest słowem pustym. Przez w^* oznaczamy zbiór słów postaci w^n dla wszelkich naturalnych n, tj. $w^* = \{w^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Zadanie 7. Opisz klasy abstrakcji relacji $\sim_L$ równoważności słów względem następujących języków:

$$\begin{aligned} L_1 &= \{1^n \mid 1 \leqslant n \leqslant 6\} \\ L_2 &= (0011)^* \\ L_3 &= \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Zadanie 8. Dla języka L nad alfabetem $\{0,1\}$ określamy funkcje

$$\begin{aligned} f &: \mathcal{Q}(L) \times \mathcal{Q}(L) \to \mathcal{Q}(L) \\ g &: \mathcal{Q}(L) \times \{0,1\} \to \mathcal{Q}(L) \end{aligned}$$

gdzie $\mathcal{Q}(L)$ jest rodziną klas abstrakcji relacji $\sim_L$ równoważności względem języka L, wzorami:

$$\begin{aligned} f([u]_{\sim_L}, [w]_{\sim_L}) &= [uw]_{\sim_L} \\ g([u]_{\sim_L}, a) &= [ua]_{\sim_L} \end{aligned}$$

gdzie $u, w \in \{0,1\}^*$ oraz $a \in \{0,1\}$.

Która z powyższych definicji jest poprawna?

Zadanie 9. Niech g będzie funkcją zdefiniowaną w poprzednim zadaniu. Kładziemy $g^*(\varepsilon) = g([\varepsilon]_{\sim_L}, \varepsilon)$ oraz $g^*(wa) = g(g^*(w), a)$ dla $w \in \{0,1\}^*$ i $a \in \{0,1\}$. Wykaż że słowo $w \in \{0,1\}^*$ należy do języka L z poprzedniego zadania wtedy i tylko wtedy, gdy $g([\varepsilon]_{\sim_L}, w) \subseteq L$, gdzie ε jest słowem pustym.

Zadanie 10. Niech $\langle A, \leqslant_A \rangle$ i $\langle B, \leqslant_B \rangle$ będą porządkami zupełnymi. Pokaż że funkcja $\varphi : [A, B] \times A \to B$, gdzie $[A, B]$ jest zbiorem funkcji ciągłych z A w B, zdefiniowana wzorem $\varphi(f, a) = f(a)$ jest ciągła.

Zadanie 11. Udowodnij że jeśli $f : A \to B$ jest monotoniczną bijekcją między dobrymi porządkami $\langle A, \leqslant_A \rangle$ i $\langle B, \leqslant_B \rangle$, to funkcja odwrotna f^{-1} też jest monotoniczna. Czy założenie że mamy do czynienia z porządkami dobrymi jest istotne?