# Logika dla informatyków

Lista zadań nr 10

7 stycznia 2000

**Zadanie 1.** Niech $A$ będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym i niech $B \subseteq A$ będzie zbiorem nieskończonym. Zbuduj bijekcje $f : B \to A$ i $g : A \to B$.

**Zadanie 2.** Niech $A$ będzie nieskończonym zbiorem przeliczalnym i niech $f : A \to B$ będzie surjekcją (odwzorowaniem "na"). Zbuduj injekcję (funkcję różnowartościową) $f : B \to A$.

**Zadanie 3.** Dany jest zbiór $X \subseteq \mathbb{N}$ spełniający warunki:

1. $0, 1 \in X$,
2. jeśli $x \in X$ oraz $x + 1 \in X$ to $x + 2 \in X$, dla każdej liczby naturalnej $x$.

Wykaż, że $X = \mathbb{N}$

Czy to twierdzenie pozostanie słuszne, jeśli warunek 1. zastąpimy przez słabszy warunek: $0 \in X$?

**Zadanie 4.** Zbiór $W$ na płaszczyźnie jest *wypukły*, jeśli wraz z każdymi dwoma punktami zawiera cały łączący je odcinek, tj. gdy $\overline{ab} \subseteq W$ dla dowolnych punktów $a, b \in W$. Niech $\langle W_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ będzie ciągiem zbiorów wypukłych takich, że $W_i \subseteq W_{i+1}$ dla każdego $i \in \mathbb{N}$. Pokaż, że zbiór $W = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} W_n$ jest wypukły.

**Zadanie 5.** Niech $A \neq \emptyset$ i niech $f : A \to A$. Udowodnij że dla dowolnego $a \in A$ istnieje najmniejszy zbiór $X \subseteq A$, taki że $a \in X$ oraz $\vec{f}^{-1}(X) \subseteq X$.

**Zadanie 6.** Niech $R \subseteq A^2$ będzię dowolną relacją i niech $R^0$ będzie relacją równości na $A$ (to znaczy $\langle x, y\rangle \in R^0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = y$). Wykazać, że $R \cup R^0 \cup R^{-1}$ jest relacją zwrotną i symetryczną.

**Zadanie 7.** Niech $Q \subseteq A^2$ będzię dowolną relacją, niech $Q^0$ bedzie relacją równości na $A$ i niech $Q^{n+1} = Q^n Q$. Kładziemy $Q_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q^n$. Wykaż, że $Q_\infty$ jest relacją przechodnią.

**Zadanie 8.** Korzystając z zadań poprzednich wykaż, że jeśli $R$ jest dowolą relacją oraz $Q = R \cup R^{-1}$, to $Q_\infty$ jest relacją równoważności.

Mówimy że ciąg liczb rzeczywistych $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *rośnie szybciej* niż ciąg $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.

**Zadanie 9.** Niech $\mathfrak{S}$ będzie zbiorem ciągów liczb rzeczywistych o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje w zbiorze $\mathfrak{S}$ ciąg $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{S}$ rosnący od niego szybciej. Wykorzystując metodę przekątniową udowodnij, że $\mathfrak{S}$ nie jest zbiorem przeliczalnym.

**Zadanie 10.** Oto przykład dwóch wnioskowań przez indukcję:

*„Pokażę, że wszystkie liczby naturalne są parzyste. Oczywiście 0 jest liczbą parzystą. Niech* $n$ *będzie dowolną liczną naturalną i załóżmy, że dla wszystkich* $k < n$, $k$ *jest parzyste. Niech* $n_1$ *i* $n_2$ *będzie dowolnym rozbiciem liczby* $n$ *na sumę liczb mniejszych (tzn.* $n = n_1 + n_2$*). Ponieważ* $n_1$ *oraz* $n_2$ *są mniejsze od* $n$, $n_1$ *i* $n_2$ *są parzyste a więc* $n$ *jest parzyste jako suma dwóch liczb parzystych.*

*„Pokażę, że wszystkie dodatnie liczby naturalne są parzyste. Oczywiście 1 jest liczbą nieparzystą. Niech* $n$ *będzie dowolną liczną naturalną i załóżmy, że dla wszystkich* $k < n$, $k$ *jest nieparzyste. Niech 1,* $n_1$ *i* $n_2$ *będzie dowolnym rozbiciem liczby* $n$ *na sumę trzech liczb mniejszych (tzn.* $n = n_1 + n_2 + 1$*). Ponieważ* $n_1$ *oraz* $n_2$ *są mniejsze od* $n$, $n_1$ *i* $n_2$ *są nieparzyste a więc* $n$ *jest parzyste jako suma dwóch liczb nieparzystych i liczby 1.*

Które z tych rozumowań jest poprawne. Wskaż błędy popełnione w błędnym rozumowaniu.