Logika dla informatyków

Egzamin

31 stycznia 2000

Zadanie 1. (10 pkt) Niech $\langle A_n : n \in \mathbf{N} \rangle$ będzie ciągiem skończonych podzbiorów zbioru X takim, że $A_{n_1} \cap \cdots \cap A_{n_k} \neq \varnothing$ dla dowolnych $n_1, \ldots, n_k \in \mathbf{N}$. Pokazać, że

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \neq \varnothing.$$

Definicja. $\langle A, \leq \rangle$ jest *porządkiem gęstym*, gdy jest porządkiem liniowym oraz dla każdego $x, y \in A$ jeżeli $x < y$ to istnieje takie $z \in A$, że $x < z < y$. $\langle A, \leq \rangle$ jest *porządkiem dobrym*, gdy jest liniowy i regularny (dobrze ufundowany).

Zadanie 2. (8 pkt) Czy na zbiorze A o mocy większej niż 1 można zdefiniować porządek jednocześnie dobry i gęsty.

Zadanie 3. (8 pkt) Skonstruować bijekcję ze zbioru Q w zbiór $Q \setminus [0, 1]$.

Definicja. Niech Z będzie zbiorem formuł rachunku zdań, których zmienne należą do zbioru $\{p_1, \ldots, p_5\}$. W tym zbiorze definiujemy relacje R_1, R_2 oraz R_3 w następujący sposób:

$\varphi R_1 \psi$	wtedy i tylko wtedy, gdy φ i ψ mają tyle samo wystąpień spójników logicznych,
$\varphi R_2 \psi$	wtedy i tylko wtedy, gdy $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jest tautologią,
$\varphi R_3 \psi$	wtedy i tylko wtedy, gdy $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jest formułą spełnialną.

Zadanie 4.

a) Czy R_1 jest relacją równoważności? Jeśli tak, podaj moc zbioru jej klas abstrakcji **(4 pkt)**.

b) Jak wyżej dla relacji R_2 **(4 pkt)**.

c) Jak wyżej dla relacji R_3 **(4 pkt)**.

Zadanie 5. Dla relacji równoważności $\sim$ na zbiorze Z, definiujemy porządek $\leq$ na zbiorze $Z/_\sim$ w następujący sposób:

$$[\varphi]_\sim \leq [\psi]_\sim \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy } (\varphi \Rightarrow \psi) \text{ jest tautologią.}$$

Czy definicja ta jest poprawna, gdy

a) relacja $\sim$ jest równa R_1? **(4 pkt)**

b) relacja $\sim$ jest równa R_2? **(4 pkt)**

c) relacja $\sim$ jest równa R_3? **(4 pkt)**

Zadanie 6. (10 pkt) Pokazać przez indukcję, że dla każdej formuły φ zbudowanej ze zmiennych p, q oraz spójnika $\Rightarrow$, można wybrać ze zbioru

$$\{1, p, q, (p \Rightarrow q), (q \Rightarrow p), (p \vee q)\}$$

taką formułę ψ, że $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jest tautologią.