Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy

11 grudnia 1999

Zasady przeprowadzania egzaminu
Za obie części egzaminu będzie można uzyskać 100 punktów. Punkty przeliczają się na oceny zgodnie z tabelką:
0–32 daje ocenę **ndst,**
33–45 daje ocenę **dst,**
46–58 daje ocenę **dst+,**
59–71 daje ocenę **db,**
72–84 daje ocenę **db+,**
85–100 daje ocenę **bdb.**
Za poniższe zadania można uzyskać 40 punktów a za zadania z drugiej części bedzie można uzyskać 60 punktów.

Zadanie 1 (5 pkt). Wykaż (przez indukcję), że dla każdej formuły zdaniowej φ zbudowanej ze zmiennych oraz spójników $\wedge, \vee$ istnieje formuła ψ postaci $\psi_1 \vee \psi_2 \vee \ldots \vee \psi_n$ taka, że dla każdego $i \leq n$, ψ_i jest koniunkcją zmiennych oraz $(\varphi \iff \psi)$ jest tautologią.

Zadanie 2 (6 pkt). Skonstruuj bijekcję pomiedzy zbiorem liczb naturalnych a zbiorem niemalejących funkcji ze zbioru liczb naturalnych w zbiór $\{1, 2, 3, 4\}$. Można skorzystać z faktu, że istnieje bijekcja z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Zadanie 3 (6 pkt). Dla $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ piszemy $g \prec f$ (i mówimy, że f majoryzuje g), jeśli istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $(\forall n \geq n_0)(g(n) < f(n))$. Czy istnieje ciąg funkcji $\langle f_i : i \in \mathbb{N}\rangle$ taki, że $f_i \prec f_{i+1}$ dla $i \in \mathbb{N}$, oraz dla każdej funkcji $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ istnieje i takie, że $g \prec f_i$.

Zadanie 4 (5 pkt). Niech $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zbiorów. Pokaż, że

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad = \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m).$$

Zadanie 5 (5 pkt). V-literałem nazywamy formułę postaci x lub $\neg x$, dla pewnego $x \in V$. Formuła zdaniowa φ jest spełnialna jeśli $\neg\varphi$ nie jest tautologią, czyli gdy φ staje się fałszywe przy pewnym wartościowaniu zmiennych. Wykaż, że dla każdej formuły spełnialnej φ ze zmiennymi z $V = \{p, q, r\}$ istnieje formuła ψ postaci $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \alpha_3$ taka, że każde α_i jest V-literałem oraz $\psi \to \varphi$ jest tautologią.

W zadaniach poniższych Z oznacza zbiór wszystkich formuł rachunku zdań zapisanych z użyciem zmiennych zdaniowych ze zbioru $V = \{p, q, r\}$.

W zbiorze Z wprowadzamy relację $\sim$ taką, że $\varphi_1 \sim \varphi_2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ jest tautologią.

Zadanie 6 (4 pkt). Wykaż, że $\sim$ jest relacją równoważności.

W zbiorze $Z/_\sim = \{[\varphi]_\sim : \varphi \in Z\}$ klas abstrakcji wyżej opisanej relacji równoważności $\sim$ wprowadzamy relację $\leq$ taką, że $[\varphi_1]_\sim \leq [\varphi_2]_\sim$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\varphi_1 \to \varphi_2$ jest tautologią.

Zadanie 7 (5 pkt). Sprawdź, że powyższa definicja opisuje porządek częściowy.

Zadanie 8 (4 pkt). Korzystając z Zadania 5 oblicz, ile jest elementów minimalnych w zbiorze $(Z/_\sim) \setminus \{[p \wedge \neg p]_\sim\}$. Odpowiedź uzasadnij.