Logika dla Informatyków

Wykład 8

14 stycznia 2000

1 Elementy algebry uniwersalnej

1 Definicja. *Sygnaturą* nazywamy rodzinę $\Sigma = \{\Sigma_n : n \in N\}$ zbiorów parami rozłącznych. Elementy zbioru Σ_n nazywamy *symbolami relacji n-argumentowych.* Elementy Σ_0 nazywamy *symbolami stałych* (lub po prostu *stałymi*). ❏

2 Definicja. *Algebrą nad* Σ (lub Σ-*algebrą*) nazywamy niepusty zbiór A wraz z interpretacją $\cdot^{\mathcal{A}}$, czyli przyporządkowaniem, które każdemu symbolowi $f \in \Sigma_n$ przyporządkowuje funkcję $f^{\mathcal{A}} : A^n \to A$. Tak opisaną algebrę oznaczamy przez $\mathcal{A}$ lub $\langle A, f^{\mathcal{A}} : f \in \Sigma\rangle$. Zbiór A nazywamy *nośnikiem* algebry $\mathcal{A}$. ❏

1.1 Algebra termów

3 Definicja. Niech Σ będzie sygnaturą i niech $V = \{v_i : i \in N\}$ będzie zbiorem zmiennych (zakładamy, że $\Sigma \cap V = \emptyset$). Przez $T(\Sigma, V)$ będziemy oznaczać zbiór termów nad Σ, czyli najmniejszy zbiór zawierający zmienne, symbole stałych (to znaczy $V \subseteq T(\Sigma, V)$, $\Sigma_0 \subseteq T(\Sigma, V)$), i zamknięty względem Σ (to znaczy jeśli $f \in \Sigma_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, V)$, to $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma, V)$).

Przez $T(\Sigma)$ będziemy oznaczać zbiór *termów stałych* nad Σ, czyli najmniejszy zbiór zawierający symbole stałych (to znaczy $\Sigma_0 \subseteq T(\Sigma)$) i zamknięty względem Σ (to znaczy jeśli $f \in \Sigma_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma)$, to $f(t_1, \ldots, t_n) \in T(\Sigma)$.

Zbiór termów stałych można też zdefiniować jako zbiór tych termów, w których nie występują zmienne. ❏

W zbiorze termów $T(\Sigma, V)$ łatwo określić interpretację $\cdot^{\mathcal{F}}$ sygnatury Σ, czyli algebrę $\langle T(\Sigma, V), f^{\mathcal{F}} : f \in \Sigma\rangle$ kładąc $f^{\mathcal{F}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$ dla $f \in \Sigma_n$, $t_1, \ldots, t_n \in T(\Sigma, V)$. Podobnie jeśli $\Sigma_0 \neq \emptyset$, można określić interpretację $\mathcal{H}$ sygnatury Σ w $T(\Sigma)$.

Algebry $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ są przykładami algebr wolnych nad Σ. Algebra $\mathcal{H}$ jest nazywana *uniwersum Herbranda* nad Σ.

4 Definicja. Niech $t, t' \in T(\Sigma, V)$. Mówimy że t' jest *podtermem* t, jeśli $t = t'$, lub $t = f(t_1, \dots, t_n)$ i t' jest podtermem t_i dla pewnego $i \leqslant n$. Jeśli t' jest podtermem t to piszemy $t' \sqsubseteq t$. ❑

1.2 Inna definicja zbioru termów. Drzewa

5 Definicja. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Zbiór $T \subseteq A^*$ jest *drzewem* jeśli jest zaknięty na przedrostki (to znaczy, jeśli $u \prec w$ (u jest przedrostkiem w) oraz $w \in T$, to $u \in T$.

Elementy drzewa nazywamy *wierzchołkami.* Każde drzewo zawiera słowo puste ε. Słowo puste nazywamy *korzeniem drzewa.* Jeśli $w \in T$ oraz $wa \in T$ dla $w \in A^*$, $a \in A$, to mówimy, że wa jest *następnikiem* (*synem*) w w T, w nazywamy *poprzednikiem* (*ojcem*) wa. Wierzchołek T, który nie ma następników nazywamy *liściem.* *Ścieżką* w drzewie T nazywamy dowolny podzbiór T liniowo uporządkowany relacją $\prec$. Ścieżka w drzewie T jest *gałęzią,* jeśli jest maksymalnym podzbiorem T liniowo uporządkowanym relacją $\prec$. Każda gałąź zawiera korzeń drzewa. Jeśli ścieżka jest skończona, to zawiera dokładnie jeden liść. *Stopniem* wierzchołka w w drzewie T nazywamy ilość następników w. *Długością ścieżki* π nazywamy moc zbioru π. *Wysokością drzewa* T nazywamy kres górny długości ścieżek w T. Jeśli drzewo T jest skończone, to jego wysokość jest równa długości najdłuższej gałęzi w T. ❑

6 Definicja. Niech T będzie drzewem i niech $w \in T$. Kładziemy

$$T_w = \{u \in A^* \mid wu \in T\}$$

Łatwo sprawdzić, że T_w jest drzewem. T_w nazywamy *podrzewem drzewa T ukorzenionym w w.* U jest podrzewem T, jeśli $U = T_w$ dla pewnego $w \in T$. ❑

7 Definicja. *Drzewem adresów* nazywamy drzewo T nad $\mathbb{N}$ o tej własności, że dla każdego $w \in T$ zbiór następników w jest odcinkiem początkowym $\mathbb{N}$, to znaczy jeśli $wn \in T$ dla pewnego $n \in N$, oraz $m < n$, to $wm \in T$. ❑

8 Definicja. Niech Σ będzie sygnaturą. *Termem* nad Σ nazywamy dowolną parę $t = \langle T, e \rangle$, gdzie T jest drzewem adresów, $e : T \to \Sigma$ zaś funkcją, taką że jeśli $w \in T, e(w) \in \Sigma_n$, to w ma stopień n. ❑

9 Definicja. Niech $t = \langle T, e \rangle$ będzie termem i niech $w \in T$. *Podtermem t* w w nazywamy term $t_w = \langle T_w, e_w \rangle$, gdzie $e_w(u) = e(wu)$. t' jest podtermem t, jeśli $t' = t_w$ dla pewnego $w \in T$. ❑

10 Definicja. Niech $\mathcal{A} = \langle A, f^{\mathcal{A}} : f \in \Sigma \rangle$ będzie algebrą nad sygnaturą Σ. Niech $T(\Sigma, X)$ będzie zbiorem termów sygnatury Σ ze zmiennymi ze zbioru X. *Wartościowaniem* X w algebrze $\mathcal{A}$ nazywamy funkcję $\sigma : X \to A$. *Wartością termu*

$t \in T(\Sigma, X)$ przy wartościowaniu σ nazywamy element $\mathcal{A}$ otrzymany z termu t po zastąpieniu każdej zmiennej x przez $\sigma(x)$, zastąpieniu symboli funkcji z Σ przez ich interpretacje w $\mathcal{A}$ oraz obliczenie tak otrzymanego wyrażenia w $\mathcal{A}$.

Bardziej formalnie, wartościowanie σ rozszerza się do funkcji $\sigma^* : T(\Sigma, X) \to A$ zdefiniowanej w następujący sposób:

$$\begin{array}{rcl} \sigma^*(x) & = & \sigma(x), \text{ dla } x \in X \text{ oraz} \\ \sigma^*(f(t_1, \dots, t_n)) & = & f^{\mathcal{A}}(\sigma(f_1), \dots, \sigma(f_n)), \text{ dla } f \in \Sigma_n,\ t_1, \dots, t_n \in T(\Sigma, X) \end{array}$$

Jeśli nie będzie prowadzić to do nieporozumień, będziemy pisali σ zamiast σ^*. Funkcję σ nazywamy *wartościowaniem zmiennych*, a funkcję σ^* *wartościowaniem termów*. Element $\sigma^*(t)$ algebry $\mathcal{A}$ nazywamy wartością termu t w algebrze $\mathcal{A}$. Zauważmy że jeśli term t nie zawiera zmiennych, to $\sigma^*(t)$ nie zależy od σ. Ogólniej, jeśli zmienna x nie występuje w t to $\sigma^*(t)$ nie zależy od $\sigma(x)$. ❏

Zdefiniowane powyżej wartościowanie termów jest przykładem *homomorfizmu* algebr, jest to przykład homomorfizmu z algebry termów $\mathcal{F}$ w algebrę $\mathcal{A}$.

11 **Definicja.** Niech $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ będą algebrami nad sygnaturą Σ. Funkcja $h : A \to B$ jest homomorfizmem algebry $\mathcal{A}$ w algebrę $\mathcal{B}$, jeśli dla każdego $f \in \Sigma_n$ i dowolnych $a_1, \dots, a_n \in A$ zachodzi równość

$$h(f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathcal{B}}(h(a_1), \dots, h(a_n))$$

Innym przykładem homomorfizmu jest *podstawienie*.

12 **Definicja.** Niech Σ będzie sygnaturą. Podstawienie σ w algebrze termów $\mathcal{F} = \langle T(\Sigma, X), f : f \in \Sigma \rangle$ jest funkcją przyporządkowująca zmiennym ze zbioru $X \subseteq V$ elementy $T(\Sigma, V)$. Jest to więc wartościowanie w algebrze termów. Jak poprzednio wartościowanie σ rozszerzamy do $\sigma^* : T(\Sigma, V) \to T(\Sigma, V)$ kładąc $\sigma(y) = y$ dla $y \in V \setminus X$. Oczywiście, tak jak poprzednio $\sigma^*(x) = \sigma(x)$ dla $x \in X$ oraz $\sigma^*(f(t_1, \dots, t_n) = f(\sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n))$. Term $\sigma^*(t)$ nazywamy wartością termu t przy podstawieniu σ. Podobnie jak poprzednio, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, piszemy σ zamiast σ^*. Wartość termu t przy podstawieniu σ jest termem uzyskanym z termu t przez zastąpienie każdego wystąpienia zmiennej x w termie t przez term $\sigma(x)$. ❏

2 Problem unifikacji

13 **Definicja.** Niech Σ będzie sygnaturą. *Problemem unifikacji* nazywamy następujące zadanie: „mając dany zbiór $\{(t_1, u_1), \dots, (t_n, u_n)\}$, znaleźć takie pod-

stawienie σ, żeby dla każdego $i \leqslant n$ zachodziło $\sigma(t_i) = \sigma(u_i)$." To znaczy, należy znaleźć takie przyporządkowanie termów zmiennym występującym w termach $t_1, u_1, \ldots, t_n, u_n$, żeby po podstawieniu tych termów za odpowiednie zmienne uzyskać termy równe. Podstawienie σ nazywamy *unifikatorem* zbioru $\{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$. Często ten zbiór (nazywany czasem *instancją problemu unifikacji*) zapisujemy jako $\{t_1 = u_1, \ldots, t_n = u_n\}$. ❑

14 Definicja. Jeśli σ i τ są unifikatorami zbioru $\{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$, to mówimy że σ jest *ogólniejsze* od τ, (co oznaczamy $\tau \leqslant \sigma$) jeśli istnieje podstawienie ρ, takie że $\tau = \rho(\sigma)$, gdzie $(\rho(\sigma))(x) = \rho(\sigma(x))$. Podstawienie σ nazywamy *najogólniejszym unifikatorem* zbioru $PU = \{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$, jeśli σ jest unifikatorem PU oraz σ jest ogólniejsze od każdego innego unifikatora PU. ❑

15 Twierdzenie. Istnieje algorytm, który dla zadanej instancji

$$\{(t_1, u_1), \ldots, (t_n, u_n)\}$$

problemu unifikacji znajduje jego najogóniejszy unifikator lub odpowiada „nie ma unifikatora". ❑