Logika dla informatyków

wykład 7

2 grudnia 1999

1 Dobry porządek

Porządek częściowy $\langle P, \leqslant \rangle$ jest regularny (dobrze ufundowany), jeśli nie istnieje nieskończony ciąg $a_0, a_1, a_2, \ldots$ taki, że $(\forall i \in \mathbb{N})(a_{i+1} < a_i)$.

Mówimy, że porządek jest *dobry*, jeśli jest liniowy i regularny.

1 Twierdzenie. Porządek częściowy $\langle P, \leqslant \rangle$ jest *regularny*, jeśli w każdym niepustym zbiorze $X \subseteq P$ istnieje element minimalny.

2 Indukcja

2 Twierdzenie. Niech $\langle P, \leqslant \rangle$ będzie regularnym porządkiem częściowym. Jesli $X \subseteq P$ spełnia warunek:

$$(\forall x)((\forall y \leqslant x)(y \in X) \Rightarrow x \in X)$$

to $X = P$.

3 Twierdzenie (O definiowaniu przez indukcję). Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Niech $g : A \to B$ oraz $h : B \times A \times \mathbb{N} \to B$ będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times \mathbb{N} \to B$ spełniająca warunki:

1. $(\forall a \in A)\Big(f(a, 0) = g(a)\Big)$
2. $(\forall a \in A)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(f(a, (n+1)) = h(f(a, n), a, n)\Big)$. ❑

4 Twierdzenie (Drugie twierdzenie o definiowaniu przez indukcje). Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Niech $g : A \to B$ oraz $h : B^* \times A \times \mathbb{N} \to B$ będą dowolnymi funkcjami. Wtedy istnieje dokładnie jedna funkcja $f : A \times \mathbb{N} \to B$ spełniająca warunki:

1. $(\forall a \in A)\Big(f(a, 0) = g(a)\Big)$

2. $(\forall a \in A)(\forall n \in \mathbb{N})\Big(f(a,(n+1)) = h((f(a,0)\dots f(a,n)),a,n)\Big)$. ❑

5 Definicja. Niech A, B będą dowolnymi zbiorami. Funkcją częściową z A w B nazywamy każdą relacje $f \subseteq A \times B$ spełniającą warunek:

$$(\forall a \in A)(\forall b_1, b_2 \in B)(((\langle a, b_1\rangle \in f) \wedge (\langle a, b_2\rangle \in f)) \Rightarrow b_1 = b_2).$$

Zbiór funkcji częściowych z A w B oznaczamy $B^{\subseteq A}$. Podobnie jak w przypadku funkcji (całkowitych) piszemy $f(a) = b$ jeśli $\langle a, b\rangle \in f$.

6 Twierdzenie (O definiowaniu funkcji przez indukcję noeterowską). Niech $\langle A, \leqslant\rangle$ będzie zbiorem regularnym i niech B, C będą dowolnymi zbiorami. Dla dowolnej funkcji funkcji $h : B^{\subseteq A\times C} \times A \times C \to B$ istnieje dokładnie jedna funcja spełniająca warunek:

$$f(x,c) = h(f \cap (\{y \in A : y < x\} \times C \times B), x, c).$$

(Przypominam, że $x < y$ oznacza $x \leqslant y \wedge x \neq y$). ❑