Logika dla informatyków

wykład 6

25 listopada 1999

Definicja. Porządek częściowy $\leq$ w zbiorze A jest liniowy jeśli $(\forall a, b \in A)((a \leq b) \vee (b \leq a))$.

Z przykładów podanych powyżej jedynie $\langle \mathrm{N}, \leq \rangle$ jest porządkiem liniowym.

1 Kresy zbiorów

Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzię porządkiem częściowym i niech $X \subseteq P$. Element $x \in X$ jest elementem największym w X jeśli dla każdego $y \in X$ zachodzi $y \leq x$. Element $x \in X$ jest elementem maksymalnym w X jeśli dla każdego $y \in X$, jeśli $x \leq y$, to $x = y$.

Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzię porządkiem częściowym i niech $X \subseteq P$. Element $x \in X$ jest elementem najmniejszym w X jeśli dla każdego $y \in X$ zachodzi $x \leq y$. Element $x \in X$ jest elementem minimalnym w X jeśli dla każdego $y \in X$, jeśli $y \leq x$, to $x = y$.

Element jest największy (maksymalny) w $\langle P, \leq \rangle$, jeśli jest największy (maksymalny) w P.

Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Porządek $\langle P, \leq^{-1} \rangle$ nazywamy porządkiem dualnym do $\langle P, \leq \rangle$. Jeśli dane jest pojęcie $\mathcal{Q}$ dotyczące porządków, to pojęcie $\mathcal{Q}^{-1}$ dualne do niego otrzymujemy przez zastąpienie w definicji $\mathcal{Q}$ symbolu $\leq$ przez symbol $\leq^{-1}$. Zauważmy, że pojęcia minimalny i maksymalny oraz najmniejszy i największy są dualne.

Twierdzenie. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $X \subseteq P$. Wtedy element największy w X jest maksymalnym elementem X oraz istnieje conajwyżej jeden element największy.

Przykład. Niech X będzie zbiorem niepustym i niech $P = \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$. Wtedy w zbiorze uporządkowanym $\langle P, \subseteq \rangle$ jest $|X|$ elementów minimalnych.

Definicja. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $X \subseteq P$. Element $a \in P$ jest ograniczeniem górnym zbioru X, jeśli dla każdego $x \in X$ zachodzi $x \leq a$. Kresem górnym zbioru X nazywamy najmniejszy element zbioru

$\{a : a$ jest ograniczeniem górnym $X\}$. Kres górny zbioru X oznaczamy $\bigvee X$. Dualnie można zdefiniować pojęcia ograniczenia dolnego i kresu dolnego (kres dolny zbioru X oznaczamy $\bigwedge X$).

Definicja. Porządek $\langle P, \leq \rangle$ jest kratą zupełna, jeśli każdy podzbiór zbioru P ma kres górny i kres dolny. Porządek $\langle P, \leq \rangle$ jest kratą, jełi każdy skończony podzbiór zbioru P ma kres górny i kres dolny.

Twierdzenie. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie porządkiem. Wtedy następujące warunki są równoważne.

1. $\langle P, \leq \rangle$ jest kratą zupełną.
2. Każdy podzbiór P ma kres górny w $\langle P, \leq \rangle$
3. Każdy podzbiór P ma kres dolny w $\langle P, \leq \rangle$

Definicja.
Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ oraz $\langle Q, \leq_Q \rangle$ będą zbiorami częściowa uporządkowanymi. Funkja $F : P \to Q$ jest monotoniczna, jeśli $(\forall x, y \in P)((x \leq_P y) \Rightarrow (f(x) \leq_Q f(y)))$.

Funkcja f jest izomorfizmem jeśli jest bijekcją oraz f i f^{-1} są monotoniczne.

Twierdzenie Knastera i Tarskiego. Niech $\langle P, \leq \rangle$ będzie kratą zupełną i niech $f : P \to P$ będzie funkcją monotoniczną. Wtedy istnieje $a \in P$ taki, że

1. $f(a) = a$
2. dla każdego $b \in P$, jeśli $f(b) = b$, to $a \leq b$.

Element a nazywamy najmniejszym punktem stałym funkcji f. Element spełniający tylko warunek 1 nazywamy punktem stałym.

Definicja. Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Wtedy zbiór $X \neq \emptyset$ jest zbiorem skierowanym, jeśli $(\forall x, y \in X)(\exists z \in X)(x \leq z \wedge y \leq z)$. Zbiór $\langle P, \leq_P \rangle$ jest porządkiem zupełnym, jeśli P ma element najmniejszy oraz każdy skierowany podzbiór X zbioru P ma kres górny (oznaczany przez $\bigvee X$.

Definicja. Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ oraz $\langle Q, \leq_Q \rangle$ będą porządkami zupełnymi. Funkcja $f : P \to Q$ jest ciągła, jeśli zachowuje kresy górne, to znaczy, gdy dla dowolnego zbioru skierowanego $X \subseteq P$, $\vec{f}(X)$ ma kres górny oraz $f(\bigvee X) = \bigvee \vec{f}(X)$.

Twierdzenie.

1. Każda funkcja ciągła jest monotoniczna.
2. Złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.

Definicja. Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ będzie porządkiem. Wtedy $\perp$ oznacza najmniejszy a $\top$ największy element P (jeśli istnieją).

Twierdzenie. Twierdzenie. Niech $\langle P, \leq_P \rangle$ będzie porządkiem zupełnym oraz niech $f : P \to P$ będzie funkcją ciągłą. Wtedy element $a = \bigvee\{f^n(\perp) : n \in N\}$ jest najmniejszym punktem stałym funkcji f.