Logika dla informatyków

wykład 4

28 października 1999

1 Relacje równoważności

Definicja. Relacja $R \subseteq A \times A$ jest

- *zwrotna*, jeśli aRa dla każdego $a \in A$,
- *symetryczna*, jeśli $aRb \Rightarrow bRa$ dla każdych $a, b \in A$,
- *przechodnia*, jeśli $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$ dla wszelkich $a, b, c \in A$.

Relację zwrotną, symetryczną i przechodnią nazywamy *relacją równoważności*.

Definicja. *Klasą abstrakcji* elementu $a \in A$ względem relacji równoważności $\sim \subseteq A \times A$ nazywamy zbiór

$$[a]_\sim \quad = \quad \{b \in A \mid a \sim b\}$$

Definicja. *Podziałem zbioru A* nazywamy dowolną rodzinę niepustych zbiorów parami rozłącznych pokrywającą A.

Lemat. Dla dowolnej relacji równoważności $\sim \subseteq A \times A$ i elementów $a, b \in A$

$$a \sim b \quad \Longleftrightarrow \quad [a]_\sim = [b]_\sim$$

Twierdzenie (*Zasada Abstrakcji*).

1. Klasy abstrakcji dowolnej relacji równoważności tworzą podział zbioru A.
2. Dla każdego podziału zbioru A istnieje dokładnie jedna relacja równoważności której klasy abstrakcji wyznaczają ten podział.

Przykład. Niech $a,b,c,d \in \mathbb{Z}$, $c,d \neq 0$. Definiujemy relację $\sim \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\}) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$ wzorem

$$\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle \quad \Longleftrightarrow \quad a \cdot d = b \cdot c$$

Relacja $\sim$ jest relacją równoważności na $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}\setminus\{0\})$. Dowód polega na sprawdzeniu wprost z definicji, czy $\sim$ jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

2 Równoliczność zbiorów

Definicja. Zbiory A i B *są równoliczne*, jeżeli istnieje bijekcja $f : A \to B$. Piszemy wówczas $A \sim B$.

Przykłady. Następujące zbiory są równoliczne:

- zbiór par liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$;
- zbiór liczb naturalnych i zbiór liczb naturalnych parzystych: $\mathbb{N} \sim \mathbb{P}$;
- dowolny niepusty przedział $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$, i odcinek $(0,1)$: $(a,b) \sim (0,1)$.

Fakt. Dla dowolnych zbiorów A,B,C

1. $A \sim A$
2. $A \sim B \Longleftrightarrow B \sim A$
3. $(A \sim B \wedge B \sim C) \Longleftrightarrow A \sim C$

Definicja. *Mocą zbioru* (którą oznaczamy $|A|$) nazywamy obiekt spełniający następującą własność: $A \sim B \Leftrightarrow |A| = |B|$.

Oznaczenie. $\underline{n} = \{0,1,\ldots,n-1\}$ oznacza zbiór liczb naturalnych mniejszych od n.

Definicja. Zbiór A jest *zbiorem skończonym*, jeśli istnieje liczba naturalna $n \in \mathbb{N}$, taka że $A \sim \underline{n}$. Mówimy wówczas że zbiór A ma n elementów.

3 Teoria mocy

Wzorce mocy (liczb kardynalnych). Mówiąc o liczbach kardynalnych posługujemy się następującymi reprezentantami zbiorów danej mocy:

- zbiory skończone: $\underline{n} = \{0,1,\ldots,n-1\}$;

– liczby naturalne: $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$;
– liczby rzeczywiste: $\mathbb{R}$.

Oznaczenia. Wprowadzamy następujące oznaczenia mocy zbiorów:

– zbiory skończone: $|\underline{n}| = n$;
– liczby naturalne: $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ (*alef zero*);
– liczby rzeczywiste: $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ (*continuum*).

Twierdzenie.

1. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nie istnieje funkcja różnowartościowa z $\underline{n+1}$ w $\underline{n}$.
2. Jeżeli istnieje funkcja różnowartościowa z $\underline{m}$ w $\underline{n}$, to $m \leq n$ (czyli $\underline{m} \subseteq \underline{n}$).
3. Jeżeli $\underline{m} \sim \underline{n}$, to $m = n$.
4. Dla każdego $m \in \mathbb{N}$, $\underline{m} \not\sim \mathbb{N}$.

Definicja. Mówimy że moc zbioru A jest nie większa niż moc zbioru B i piszemy $|A| \leq |B|$, jeśli istnieje funkcja różnowartościowa $f : A \to B$.