Logika dla informatyków

wykład 3

21 października 1999

1 Relacje

1.1 Para uporządkowana

Parę elementów a i b będziemy zapisywać w postaci $\langle a,b\rangle$. Para będzie dla nas pojęciem pierwotnym. Przyjmujemy następujący aksjomat:

$$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \iff a = c \wedge b = d$$

Specjaliści od podstaw matematyki pragną za pojęcia pierwotne uważać jedynie zbiór i relację należenia do zbioru i wolą *zdefiniować* parę następująco:

$$\langle a,b\rangle = \{\{a\},\{a,b\}\}$$

Para w takim ujęciu składa się ze zbioru dwuelementowego, w którym wyróżniliśmy, który element jest pierwszy. Zauważmy że ostatnia definicja spełnia aksjomat „naszej” pary.

1.2 Iloczyn (produkt) kartezjański

Iloczynem kartezjańskim dwóch zbiorów nazywamy zbiór wszystkich par złożonych z elementów tych zbiorów:

$$A \times B = \{\langle a,b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$$

1.3 Relacje

Dowolny podzbiór $R \subseteq A \times B$ produktu kartezjańskiego zbiorów A i B nazywamy *relacją dwuargumentową* (*binarną*). Jeśli $\langle a,b\rangle \in R$, to mówimy, że elementy $a \in A$ i $b \in B$ *są ze sobą w relacji*. Zamist pisać $\langle a,b\rangle \in R$, piszemy też niekiedy aRb. Podzbiory A^2 są *binarnymi relacjami na zbiorze* A.

Przykłady relacji binarnych:

– identyczność (równość, przekątna) na zbiorze A: $\{\langle x,x\rangle \mid x \in A\}$
– relacja mniejszości $\leq$ na zbiorze A: $\{\langle x,y\rangle \mid x \leq y\}$
– $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, taka że xRy gdy $y = x^2$.

1.4 Krotki (n-tki) uporządkowane

Pojęcie pary łatwo uogólnić na ciągi uporządkowane dowolnej, skończonej długości. Zakładamy że $\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$ jest pojęciem pierwotnym i przyjmujemy aksjomat

$$\langle a_1,\ldots,a_n\rangle = \langle b_1,\ldots,b_n\rangle \iff a_1 = b_1 \wedge \ldots \wedge a_n = b_n$$

Krotki można również *zdefiniować* za pomocą pojęcia pary: krotka dwuelementowa jest parą, krotka $n+1$-elementowa jest parą złożoną z pierwszego elementu i krotki n-elementowej:

$$\begin{cases} \langle a_1,a_2\rangle = \langle a_1,a_2\rangle & \text{(krotka dwuelementowa jest parą)} \\ \langle a_0,a_1,\ldots,a_n\rangle = \langle a_0,\langle a_1,\ldots,a_n\rangle\rangle & \end{cases}$$

Krotka stuelementowa jest nazywana stokrotką.

W oczywisty sposób uogólniamy pojęcie *produktu* na n zbiorów:

$$A_1 \times \ldots \times A_n \quad = \quad \{\langle a_1,\ldots,a_n\rangle \mid a_1 \in A_1,\ldots,a_n \in A_n\}$$

Relacją n-argumentową nazywamy dowolny podzbiór produktu n zbiorów. Dla przykładu

$$\{a,b,c \in \mathbb{N} \mid a \cdot b = c\} \qquad \{a,b,c \in \mathbb{N} \mid a \cdot b < c\}$$

są relacjami trójargumentowymi na zbiorze $\mathbb{N}$.

1.5 Złożenie relacji. Relacja odwrotna

Dane są relacje $P \subseteq A \times B$ i $Q \subseteq B \times C$. Relacja

$$PQ = \{\langle a,c\rangle \mid \exists b.(aPb \wedge bQr)\} \subseteq A \times C$$

nazywa się *złożeniem* relacji P i Q. Relacja

$$P^{-1} = \{\langle b,a\rangle \mid \langle a,b\rangle \in P\} \subseteq B \times A$$

nazywa się *relacją odwrotną* do P.

Twierdzenie. Dla dowolnych relacji $T \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ i $R \subseteq C \times D$:

$$\begin{aligned} T(SR) &= (TS)R \\ (SR)^{-1} &= R^{-1}S^{-1} \end{aligned}$$

2 Funkcje

Relację $f \subseteq A \times B$ nazywamy *funkcją o dziedzinie A i zbiorze wartości (przeciwdziedzinie) B*, jeżeli

1. $\forall a \in A . \exists b \in B . \langle a, b\rangle \in f$
2. $\forall a \in A . \forall b_1 \in B . \forall b_2 \in B . (\langle a, b_1\rangle \in f \wedge \langle a, b_2\rangle \in f \Rightarrow b_1 = b_2)$

Zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie A i przeciwdziedzinie B oznaczamy B^A.

Relację spełniającą jedynie warunek 2 nazywamy *funkcją częściową*. *Dziedziną* funkcji częściowej f nazywamy zbiór

$$\mathrm{Dom}(f) = \{a \in A \mid \exists b \in B . f(a) = b\}$$

Zamist $f \subseteq A \times B$ piszemy zwykle $f : A \to B$, zaś zamiast afb albo $\langle a, b\rangle \in f$ piszemy $b = f(a)$.

Pytanie. Ile jest funkcji $f : A \to B$? Ile jest funkcji $f : \emptyset \to B$ a ile $f : A \to \emptyset$?

Z pomocą pojęcia funkcji możemy jeszcze inaczej zdefiniować n-tki uporządkowane: $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ jest funkcją $f : \{1, \ldots, n\} \to A$. Wówczas $f(i)$ jest i-tym elementem krotki.

Funkcja $f : A \to B$ jest *różnowartościowa* (jest *injekcją*), jeżeli

$$\forall a_1, a_2 \in A . (f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2)$$

Funkcja $f : A \to B$ jest *„na”* (jest *surjekcją*), jeżeli

$$\forall b \in B . \exists a \in A . f(a) = b$$

Funkcja f jest *odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym* (*bijekcją*), jeśli jest różnowartościowa i „na”.

3 Funkcje odwrotne, złożenie funkcji

Twierdzenie. Jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$ są funkcjami, to relacja $gf \subseteq A \times C$ jest funkcją z A w C. Dla $a \in A$, $(gf)(a) = g(f(a))$. Funkcja fg jest różnowartościowa, gdy f i g obie są różnowartościowe. Funkcja fg jest „na”, jeśli f i g sa „na”.

Definicja. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Wtedy funkcja $f : B \to A$ jest *funkcją odwrotną* do f, jeśli $gf = I_A$ oraz $fg = I_B$ (gdzie I_A, I_B oznaczają funkcje identycznościowe odpowiednio na zbiorach A i B).

Twierdzenie. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją. Wtedy następujące warunki są równoważne:

1. f ma funkcję odwrotną,
2. f jest bijekcją,
3. Relacja odwrotna f^{-1} jest funkcją.

Funkcję odwrotną do f oznaczamy f^{-1}.

4 Obraz i przeciwobraz zbioru

Definicja. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją i niech $X \subseteq A$. *Obrazem zbioru X w odwzorowaniu f* nazywamy zbiór

$$\vec{f}(X) \quad = \quad \{b \in B \mid (\exists a)(f(a) = b)\}$$

Przeciwobrazem zbioru $Y \subseteq B$ nazywamy zbiór

$$\vec{f}^{-1}(X) \quad = \quad \{a \in A \mid f(a) \in Y\}$$

Oznaczenie. Niech $\mathcal{X}$ bedzie rodziną podzbiorów zbioru A. Wtedy

$$\begin{aligned} \bigcup \mathcal{X} &= \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X \\ \bigcap \mathcal{X} &= \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X \end{aligned}$$

Twierdzenie. Niech $f : A \to B$ będzie funkcją i niech $\mathcal{X}$ bedzie rodziną podzbiorów zbioru A. Wtedy

$$\begin{aligned} & \vec{f}(\bigcup \mathcal{X}) &= \bigcup\{\vec{f}(X) \mid X \in \mathcal{X}\} \quad (1) \\ \text{Jeśli } \mathcal{X} \neq \emptyset\text{, to} \quad & \vec{f}(\bigcap \mathcal{X}) &\subseteq \bigcap\{\vec{f}(X) \mid X \in \mathcal{X}\} \quad (2) \\ & \vec{f}^{-1}(\bigcup \mathcal{Y}) &= \bigcup\{\vec{f}^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\} \quad (3) \\ \text{Jeśli } \mathcal{Y} \neq \emptyset\text{, to} \quad & \vec{f}^{-1}(\bigcap \mathcal{Y}) &= \bigcap\{\vec{f}^{-1}(Y) \mid Y \in \mathcal{Y}\} \quad (4) \end{aligned}$$

Czy symbol „$\subseteq$” we wzorze (2) można zastąpić symbolem „$=$”?