Logika dla informatyków

wykład 1

7 października 1999

1 Rachunek zdań

1.1 Składnia

Formuły rachunku zdań (ktore będziemy oznaczać ϕ, ψ,...) budujemy ze *zmiennych zdaniowych*, pochodzących z nieskończonego zbioru $V = \{p, q, p_1, p_2, \ldots\}$, i *spójników logicznych* absurdu $\bot$, negacji $\neg$, koniunkcji $\wedge$, alternatywy $\vee$, implikacji $\Rightarrow$ i równoważności $\Leftrightarrow$ w następujący sposób:

$$\phi \quad ::= \quad p \mid \neg\phi \mid \phi_1 \wedge \phi_2 \mid \phi_1 \vee \phi_2 \mid \phi_1 \Rightarrow \phi_2 \mid \phi_1 \Leftrightarrow \phi_2$$

W razie wątpliwości używamy nawiasów do wskazania sposobu rozbioru formuły. Niekiedy nawiasy opuszczamy zakładając następującą kolejność wiązania (od najsilniejszego do najsłabszego): $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ i przyjmując, że $\wedge$ i $\vee$ łaczą w lewo (tj. $p \vee r \vee s$ znaczy $(p \vee r) \vee s$), zaś $\Rightarrow$ i $\Leftrightarrow$ — w prawo (tj. $p \Rightarrow r \Rightarrow s$ znaczy $(p \Rightarrow r) \Rightarrow s$). Zatem np. $p \vee q \vee r \wedge s$ oznacza $(p \vee q) \vee (r \wedge s)$.

1.2 Wartości logiczne i znaczenie formuł zdaniowych

Zbiór *wartości logicznych* $\mathcal{B} = \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ zawiera dwa elementy: T (prawdziwe, *true*) i F (fałszywe, *false*). *Wartościowanie zmiennych* to odwzorowanie $\sigma : V \to \mathcal{B}$. Nadaje ono wartości logiczne zmiennym zdaniowym.

Wartość logiczna dowolnej formuły zdaniowej zależy jedynie od wartościowania występujących w niej zmiennych i można ją wyznaczyć korzystając z tabelek z Rysunku 1.

Formuła jest:

spełniona przy danym wartościowaniu zmiennych, jeżeli przy tym wartościowaniu ma wartość T;

$\bot$
F

ϕ	$\neg\phi$
F	T
T	F

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \vee \psi$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \Rightarrow \psi$
F	F	T
F	T	T
T	F	F
T	T	T

ϕ	ψ	$\phi \Leftrightarrow \psi$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Rysunek 1: Znaczenie spójników logicznych

spełnialna, jeżeli istnieje wartościowanie zmiennych, przy którym ta formuła ma wartość T;

prawdziwa (jest tautologią), jeśli ma wartość Tdla każdego wartościowania zmiennych;

sprzeczna, jeśli ma wartość F dla każdego wartościowania zmiennych.

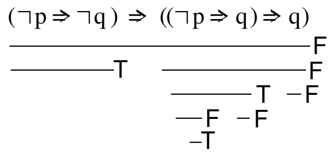
O formule spełnionej przez dane wartościowanie zmiennych będziemy niekiedy mówić, że jest *prawdziwa* przy tym wartościowaniu. Podobnie formuła nie spełniona będzie *fałszywa*.

1.3 Metoda zero-jedynkowa sprawdzania tautologii

Przykładami tautologii są formuły $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ oraz $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ zwane *prawami de Morgana*. Istotnie, rysujemy tabelkę (Rysunek 2) umieszczając w kolumnach 1 i 2 wartości zmiennych zdaniowych p i q. W kolumnie 3 umieszczamy wartości formuły $p \vee q$ wyliczone z użyciem tabelki dla alternatywy. W kolumnie 4 obliczamy, w oparciu o tabelkę negacji, wartości formuły $\neg(p \vee q)$. Kolumy 5 i 6 wyznaczamy również w oparciu o tabelkę negacji. Aby wyznaczyć wartości formuły $(\neg p) \wedge (\neg q)$ korzystamy z wartości zapisanych w kolumnach 5 i 6 i z tabelki koniunkcji. Ostatnią, ósmą kolumnę wyznaczamy przy użyciu tabelki dla równoważności z wartości logicznych zapisanych w kolumnach 6 i 7. Po skonstruowaniu tabelki zauważamy, że dla każdego z czterech możliwych wartościowań zmiennych p i q formuła $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$ ma wartość logiczną T, jest więc tautologią.

1	2	3	4	5	6	7	8
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$
F	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	T	F	F	T
T	F	T	F	F	T	F	T
T	T	T	F	F	F	F	T

Rysunek 2: Tabelkowa metoda sprawdzenia, że prawo de Morgana jest tautologią.



Rysunek 3: Wartościowanie dla którego formuła $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$ nie jest spełniona.

1.4 Metoda zero-jedynkowa przyspieszona

Sprawdzenie czy formuła jest tautologią można znacznie przyspieszyć, jeśli zamiast bezmyślnie sprawdzać wartość formuły dla wszystkich możliwych wartościowań zmiennych, będziemy świadomie poszukiwać wartościowania, dla którego formuła nie jest spełniona. Ustalenie takiego wartościowania przekona nas, że formuła nie jest tautologią, dojście do sprzeczności zaś — że nią jest. Rozważmy dla ustalenia uwagi formułę $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$. Formuła ta nie jest spełniona, jeśli poprzednik implikacji $\neg p \Rightarrow \neg q$ jest prawdziwy, jej następnik $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ zaś — fałszywy. Formuła $(\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ jest fałszywa tylko wówczas, gdy $\neg p \Rightarrow q$ jest spełniona oraz $\sigma(q) = \mathsf{F}$. Ale $\neg p \Rightarrow q$ jest spełniona dla $\sigma(q) = \mathsf{F}$ tylko wówczas, gdy $\neg p$ nie jest spełniona, tj. gdy $\sigma(p) = \mathsf{T}$. Zauważamy na koniec, że przy wartościowaniu $\sigma(p) = \mathsf{T}$ i $\sigma(q) = \mathsf{F}$ nasza wyjściowa formuła istotnie nie jest spełniona, nie jest więc tautologią (Rysunek 3).

Rozważmy teraz formułę $\phi = p \Rightarrow (q \Rightarrow p)$. Aby ϕ nie była spełniona, musi być $\sigma(p) = \mathsf{T}$ oraz powinna nie być spełniona formuła $q \Rightarrow p$. Formuła ostatnia nie jest spełniona tylko wówczas, gdy $\sigma(q) = \mathsf{T}$ oraz $\sigma(p) = \mathsf{F}$. Zatem aby ϕ nie była spełniona, musiałoby być jednocześnie $\phi(p) = \mathsf{T}$ i $\phi(p) = \mathsf{F}$, co jest niemożliwe. Formuła ϕ jest zatem tautologią.

Przykładami tautologii są także

$$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$$

$$(\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow ((\neg p \Rightarrow q) \Rightarrow q)$$

1.5 Funkcje boolowskie i systemy spójników

Funkcje $f : \mathcal{B}^n \to \mathcal{B}$ nazywamy n-argumentowymi funkcjami boolowskimi, $n \geq 0$. Funkcje boolowskie możemy opisywać za pomocą formuł zdaniowych, np.

$$f(p,q,r) \quad \equiv \quad (p \wedge q) \Rightarrow (p \vee r)$$

Zbiór spójników logicznych jest *zupełny*, jeżeli dowolną funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne. Zbiór spójników jest *2-zupełny*, jeżeli każdą *co najwyżej dwuargumentową* funkcję boolowską można opisać za pomocą formuły zdaniowej zawierającej jedynie spójniki z tego zbioru i zmienne.

Na ćwiczeniach pokażemy że

- każdy zbiór 2-zupełny jest zupełny;
- $\{\vee, \wedge, \Leftrightarrow\}$ nie jest zupełny;
- $\{\vee, \wedge\}$ nie jest zupełny;
- $\{\Rightarrow, \bot\}$ jest zupełny;
- $\{\wedge, \neg\}$ jest zupełny;
- istnieje binarny spójnik $\uparrow$, taki że $\{\uparrow\}$ jest zupełny;

i wskażemy inne przykłady systemów zupełnych.