Logika dla informatyków

Egzamin poprawkowy

26 lutego 2005

Zadanie 1 (20 pkt.). Niech symbol $\leq$ oznacza liniowy porządek w niepustym, skończonym zbiorze A. Udowodnij, że porządek $\leq$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy zbiór A jest jednoelementowy.

Zadanie 2 (20 pkt.). Załóżmy, że $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$. Czy dla dowolnych takich zbiorów zachodzi równość

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) \quad = \quad (X \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times B)?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3 (20 pkt.). Funkcję f określoną w pewnej dziedzinie $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathcal{P}(A)$ i przyjmującą wartości ze zbioru $\{0, 1\}$ nazywamy *funkcją parzystości w zbiorze* $\mathcal{P}(A)$, jeżeli

1. dla dowolnych $X \in \mathrm{dom}(f)$ i $x \in A$ także $X \cup \{x\} \in \mathrm{dom}(f)$ oraz $X \setminus \{x\} \in \mathrm{dom}(f)$,
2. $\emptyset \in \mathrm{dom}(f)$ oraz $f(\emptyset) = 0$,
3. dla dowolnego $X \in \mathrm{dom}(f)$ i dowolnego $x \in A \setminus X$ zachodzi równość

$$f(X \cup \{x\}) \quad = \quad 1 - f(X).$$

Wykaż, że na zbiorze $\mathcal{P}(A)$ istnieje dokładnie jedna funkcja parzystości wtedy i tylko wtedy, gdy A jest zbiorem skończonym.

Zadanie 4 (20 pkt.). Pokaż, że zbiór wartości dowolnej nierosnącej funkcji

$$f \ : \ \mathbb{N} \to \left\{ n + \frac{m}{m+1} \;\middle|\; n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

jest skończony.

Zadanie 5 (20 pkt.). Niech V będzie niepustym i skończonym zbiorem zmiennych zdaniowych. Znajdź zbiór wszystkich wartościowań spełniających formułę

$$\neg \bigwedge_{p,q \in V} (p \Rightarrow q).$$

Udowodnij, że Twoja odpowiedź jest poprawna.