Logika dla informatyków

Egzamin połówkowy

4 grudnia 2004

Wersja D

Zadanie 1 (6 pkt). Czy prawdziwe jest zdanie:

„Dla dowolnych zbiorów A i B, jeśli $A \times B \subseteq B \times A$, to $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$”?

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2 (6 pkt). Liczbę naturalną q nazywamy *liczbą bliźniaczą*, jeżeli liczby q oraz $q + 2$ są pierwsze. Używając symboli $+, \times, 0, 1, 2$ oraz nawiasów, zmiennych, kwantyfikatorów i spójników logicznych zapisz formalnie zdanie

„Istnieje największa liczba bliźniacza taka, że pomiędzy nią a poprzednią liczbą biźniaczą jest co najwyżej jedna liczba pierwsza.”

Zadanie 3 (6 pkt). Pokaż, że $A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)$ dla dowolnych zbiorów A, B, C i D.

Zadanie 4 (6 pkt). Niech n będzie dodatnią liczbą naturalną i niech $V_n = \{p_0, \ldots, p_{n-1}\}$ będzie zbiorem zmiennych zdaniowych. Przyjmijmy, że dla formuły ϕ nie zawierającej zmiennych spoza zbioru V_n napis $nv_n(\phi)$ oznacza liczbę wartościowań $\sigma : V_n \to \{\mathsf{T}, \mathsf{F}\}$ spełniających tę formułę. Pokaż, że dla dowolnych formuł zdaniowych ϕ oraz ψ, które nie zawierają zmiennych spoza zbioru V_n, równość

$$nv_n(\phi \vee \psi) = nv_n(\phi) + nv_n(\psi)$$

zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $\phi \wedge \psi$ jest formułą sprzeczną.

Zadanie 5 (6 pkt). Rodzina zbiorów $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest *zstępująca*, jeżeli $X_{n+1} \subseteq X_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Ciąg liczb naturalnych $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ jest *rosnący*, jeżeli $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Niech $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych, a $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ — zstępującą rodziną zbiorów. Udowodnij, że

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{a_n}.$$

verte →

W poniższych zadaniach należy postawić krzyżyk w polu z prawidłową odpowiedzią. Za każdą poprawną odpowiedź dostajecie 1 punkt, za błędną -1 punkt. Dlatego, jeśli nie jesteście pewni, wybierzcie odpowiedź „Nie wiem”.

Zadanie 6 (4 pkt). Czy podana formuła zdaniowa jest tautologią?

$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \Rightarrow p \wedge s \Rightarrow q \vee r$ .... Tak | Nie | Nie wiem

$(p \vee q) \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \Rightarrow p$ .... Tak | Nie | Nie wiem

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p) \Rightarrow p \vee q$ .... Tak | Nie | Nie wiem

$(p \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ .... Tak | Nie | Nie wiem

Zadanie 7 (2 pkt). Niech ϕ i ψ oznaczają formuły rachunku kwantyfikatorów, być może zawierające wolne wystąpienia zmiennej x. Czy podana formuła jest prawem rachunku rachunku kwantyfikatorów?

$(\forall x\ \phi) \vee (\forall x\ \psi) \Rightarrow (\forall x\ (\phi \vee \psi))$ .... Tak | Nie | Nie wiem

$(\forall x\ (\phi \Rightarrow \psi)) \Rightarrow (\forall x\ \phi) \Rightarrow (\forall x\ \psi)$ .... Tak | Nie | Nie wiem

Zadanie 8 (2 pkt). Czy dla dowolnych zbiorów A, B, C i D zachodzi podana równość?

$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ .... Tak | Nie | Nie wiem

$A \cup (B \setminus C) = ((A \cup B) \setminus C) \cup (A \cap C)$ .... Tak | Nie | Nie wiem

Zadanie 9 (2 pkt). Czy dla dowolnego niepustego zbioru T i dowolnych rodzin zbiorów $\{A_t\}_{t\in T}$ i $\{B_t\}_{t\in T}$ zachodzi podana równość?

$\bigcap_{t\in T} (A_t \cap B_t) = \bigcap_{t\in T} A_t \cap \bigcap_{t\in T} B_t$ .... Tak | Nie | Nie wiem

$\bigcup_{t\in T} (A_t \cap B_t) = \bigcup_{t\in T} A_t \cap \bigcup_{t\in T} B_t$ .... Tak | Nie | Nie wiem