# Logika dla informatyków 2004

Egzamin połowkowy

Rozwiązania zadań o nieparzystych numerach

## Zadanie 1

Czy prawdziwe jest zdanie:

„Dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$, jeżeli $A \times B \subseteq B \times A$, to $A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$”?

Odpowiedź uzasadnij.

**Rozwiązanie.** Tak, zdanie powyższe jest prawdziwe dla dowolnych zbiorów $A$ i $B$. Istotnie, przypuśćmy, że $A \times B \subseteq B \times A$ oraz $A \neq \emptyset$ i $B \neq \emptyset$. Pokażemy, że $A = B$. Skoro $A \neq \emptyset$, to istnieje pewien element $a_0 \in A$. Dla dowolnego $b \in B$ mamy wówczas $\langle a_0, b\rangle \in A \times B$. Skoro $A \times B \subseteq B \times A$, to $\langle a_0, b\rangle \in B \times A$. Zatem $b \in A$. Ponieważ w powyższym rozumowaniu $b$ jest dowolne, więc $B \subseteq A$. Analogicznie skoro $B \neq \emptyset$, to istnieje pewien element $b_0 \in B$. Dla dowolnego $a \in A$ jest wtedy $\langle a, b_0\rangle \in A \times B$. Skoro $A \times B \subseteq B \times A$, to $\langle a, b_0\rangle \in B \times A$. Zatem $a \in B$. Pokazaliśmy więc, że $A \subseteq B$. Skoro $B \subseteq A$ oraz $A \subseteq B$, to $A = B$.

## Zadanie 3

Pokaż, że $A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)$ dla dowolnych zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$.

**Rozwiązanie 1.** (Najczęściej przedstawiane na egzaminie.) Zauważmy, że równoważne są każde dwie z niżej podanych formuł:

1. $x \in A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$,
2. $x \in A \wedge \neg(x \in B \wedge \neg(x \in C \wedge x \notin D))$,
3. $x \in A \wedge (x \notin B \vee (x \in C \wedge x \notin D))$,
4. $(x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge (x \in C \wedge x \notin D))$,
5. $(x \in A \wedge x \notin B) \vee ((x \in A \wedge x \in C) \wedge x \notin D)$,
6. $x \in (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)$.

Równoważność dwóch pierwszych formuł wynika z definicji działań mnogościowych, drugiej i trzeciej – z prawa de Morgana i prawa podwójnej negacji, dwóch kolejnych – z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy, następnej pary – z prawa łączności dla koniunkcji, a dwóch ostatnich – znowu z definicji działań mnogościowych. W ten sposób, dla dowolnego $x$ dowiedliśmy równoważność

$$x \in A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) \;\Leftrightarrow\; x \in (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D).$$

Oznacza to, że

$$\forall x \;\; (x \in A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) \;\Leftrightarrow\; x \in (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)).$$

W tej sytuacji równość

$$A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D))$$

wynika z zasady ekstensjonalności.

Przedstawione rozwiązanie zawiera elementy sformalizowanego rachunku logicznego. Czytając takie rozwiązanie nie wiadomo, czy osoba, która je przedstawiła rozumie, co robi, czy też nauczyła się tylko mechanicznie wykonywać dziwne i niezrozumiałe przekształcenia. Co więcej, takie rozwiązania są możliwe tylko w prostych przypadkach, a zadań bardziej interesujących nie można rozwiązać w ten sposób. Nie polecałbym tej metody ze względów dydaktycznych, mimo że jej zaletą jest czytelność. Zauważmy także, że czytając podręczniki wyjątkowo spotykamy się z takimi rozumowaniami. Również przekonując siebie i kolegów o słuszności różnych stwierdzeń zwykle robimy to w inny sposób.

**Rozwiązanie 2.** Udowodnię teraz dwa zawierania

$$A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) \subseteq (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D))$$

oraz

$$(A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)) \subseteq A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$$

nie korzystając z formalnego rachunku logicznego (a więc tak naprawdę znowu skorzystam z zasady ekstensjonalności).

*Dowód (pierwszego zawierania).* Weźmy dowolny $x \in A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$. Nietrudno zauważyć, że elementy zbioru $A \setminus B$ należą do $(A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D))$. Wobec tego, dalej wystarczy rozważać tylko te elementy $x$, które nie należą do $A \setminus B$.

Element $x$ należący do $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$ należy również do zbioru $A$. Jeżeli nie należy do $A \setminus B$, to należy do $B$. Wiemy też, że $x \notin B \setminus (C \setminus D)$. Jeżeli $x$ należący do $B$ nie znalazł się w tej różnicy, to należy do $C \setminus D$. Otrzymaliśmy więc, że $x \in A$, $x \in C$ oraz $x \notin D$. Teraz łatwo sprawdzić, że $x$ należy do drugiego składnika sumy $(A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D))$. To kończy dowód pierwszej inkluzji.

*Dowód (drugiego zawierania).* Aby dowieść drugą inkluzję, weźmy $x \in (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)$. Są dwa rodzaje takich elementów $x$. Taki $x$ może należeć do $A \setminus B$. Wtedy $x \in A$ oraz $x \notin B$. Warunkiem należenia do $B \setminus (C \setminus D)$ jest między innymi należenie do $B$. Wobec tego, $x \notin B \setminus (C \setminus D)$. Ponieważ $x \in A$, więc także $x \in A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$.

Powinniśmy się jeszcze zająć elementami $x \in (A \cap C) \setminus D$. Te elementy należą do $A$ i do $C \setminus D$. Elementy zbioru $C \setminus D$ zostały usunięte ze zbioru $B \setminus (C \setminus D)$, więc $x \notin B \setminus (C \setminus D)$. Oznacza to że $x$ spełnia oba warunki wymagane od elementów $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$, czyli $x \in A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$. Udowodniliśmy więc drugie zawieranie i tym samym dowiedliśmy, że

$$A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D)).$$

**Rozwiązanie 3.** Zamiast wyprowadzać równość z zadania bezpośrednio z definicji działań mnogościowych można skorzystać z własności tych działań. Takie rozwiązanie może być oparte na następującym rachunku:

$$A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) = A \cap (B \cap (C \cap D^c)^c)^c = A \cap (B^c \cup (C \cap D^c)) =$$

$$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C \cap D^c) = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D).$$

W powyższych wzorach $^c$ oznacza operację dopełnienia. Pierwsza równość wynika ze związku między różnicą i dopełnieniem, czyli z wzoru $X \setminus Y = X \cap Y^c$ zastosowanego trzy razy. Druga równość jest konsekwencją prawa de Morgana $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$. Trzecia wynika z prawa rozdzielności przekroju względem sumy mnogościowej. Ostatnia jest konsekwencją związku między różnicą a dopełnieniem oraz łączności przekroju.

Przedstawione rozwiązanie może być niezrozumiałe dla osób, które nie słyszały o dopełnieniu. Jest to bardzo naturalne działanie mnogościowe, jeżeli rozważamy podzbiory ustalonego zbioru zwanego wtedy przestrzenią. Z pewną ostrożnością może być wykorzystywane w każdej sytuacji.

Jeżeli $P$ jest przestrzenią, to dopełnieniem zbioru $X \subseteq P$ nazywamy różnicę$P \setminus X$ i oznaczamy ją symbolem $X^c$. Zauważmy, że dopełnienie to jest właściwie dopełnienie do ustalonego zbioru (w tym przypadku $P$) i można dopełniać do różnych zbiorów. Zauważmy również, że dla tak zdefiniowanego dopełnienia i dla $X \subseteq P$ zachodzi wzór

$$X \setminus Y = X \cap (P \setminus Y) = X \cap Y^c$$

oraz podane wyżej prawo de Morgana.

Z treści zadania nie wynika, że zbiory $A$, $B$, $C$ i $D$ są zawarte w jakiejś naturalnej przestrzeni. Zawsze jednak możemy przyjąć, że $P = A \cup B \cup C \cup D$ (lub $P = A \cup B \cup C$). Taka definicja $P$ gwarantuje prawdziwość wzoru $X \setminus Y = X \cap Y^c$ w wymaganym zakresie.

**Rozwiązanie 4.** Kilka rozwiązań zadania 3 polegało na sprawdzeniu podanej równości dla konkretnych zbiorów. Rzeczywiście, tak też można rozwiązać to zadanie i niektóre z tych rozwiązań zostały częściowo uznane. Dowodzona w ten sposób równość musi jednak zostać sprawdzona dla specjalnych zbiorów (ten warunek nie zawsze był spełniony). Uważaliśmy także, że warunkiem pełnego uznania takiego rozwiązania jest komentarz pozwalający przynajmniej na odróżnienie zastosowania omawianej metody od sprawdzenia równości w jednym przypadku (ten warunek nigdy nie był spełniony).

Spróbuję uzasadnić poprawność tej metody nie zachowując pełnej ogólności. Będziemy teraz dokładnie analizować rozwiązanie 1. Najpierw wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech

$$L_{ABCD} = A \setminus (B \setminus (C \setminus D)) \text{ oraz } P_{ABCD} = (A \setminus B) \cup ((A \cap C) \setminus D).$$

Będziemy też rozważać zmienne zdaniowe $a$, $b$, $c$ i $d$ (odpowiadają one zbiorom lub zmiennym $A$, $B$, $C$ i $D$), a także formuły zdaniowe z tymi zmiennymi oraz wartościowania takich formuł. Przyjmijmy, że $h^x_{ABCD}$ oznacza wartościowanie zmiennych $a$, $b$, $c$ i $d$ takie, że

$$h^x_{ABCD}(a) = T \iff x \in A$$

i spełniające analogiczne warunki dla pozostałych zmiennych, a $H_{ABCD}$ oznacza zbiór wszystkich takich wartościowań. Symbolem $h^x_{ABCD}(\varphi)$ będę oznaczać wartość logiczną formuły $\varphi$ przy wartościowaniu $h^x_{ABCD}$.

Zauważmy, że w rozwiązaniu 1 zostały skonstruowane dwie formuły zdaniowe $\varphi$ i $\psi$ takie, że

$$\forall A, B, C, D\ \forall x\ (x \in L_{ABCD} \iff h^x_{ABCD}(\varphi) = T)$$

oraz

$$\forall A, B, C, D\ \forall x\ (x \in P_{ABCD} \iff h^x_{ABCD}(\psi) = T).$$

Formuły te nie zależą od zbiorów $A$, $B$, $C$ i $D$, a jedynie od wyrażeń występujących po obu stronach równości, np. formuła $\varphi$ jest równa $a \wedge \neg(b \wedge \neg(c \wedge \neg d))$ bez względu na to, co oznaczają symbole $A$, $B$, $C$ i $D$.

Z podanych własności wynika, że

$$\forall A, B, C, D\ (\forall x\ (x \in L_{ABCD} \Leftrightarrow x \in P_{ABCD}) \Leftrightarrow \forall x\ (h^x_{ABCD}(\varphi) = T \Leftrightarrow h^x_{ABCD}(\psi) = T))$$

oraz

$$\forall A, B, C, D\ (L_{ABCD} = P_{ABCD} \iff \forall h \in H_{ABCD}\ h(\varphi \iff \psi) = T). \tag{1}$$

*Twierdzenie 4.1. Jeżeli $A'$, $B'$, $C'$ i $D'$ są jakimikolwiek zbiorami dla których zbiór $H_{A'B'C'D'}$ zawiera wszystkie możliwe wartościowania, oraz zachodzi równość $L_{A'B'C'D'} = P_{A'B'C'D'}$ to*

$$\forall A, B, C, D\ L_{ABCD} = P_{ABCD}$$

*(a więc jeżeli równość $L = P$ zachodzi dla jednej (specyficznej) czwórki zbiorów, to zachodzi dla wszystkich możliwych czwórek).*

*Dowód.* Aby dowieść podane twierdzenie skorzystamy z własności (1) dla $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$ i $D = D'$. W ten sposób otrzymujemy, że

$$L_{A'B'C'D'} = P_{A'B'C'D'} \iff \forall h \in H_{A'B'C'D'}\ h(\varphi \iff \psi) = T.$$

Na mocy założenia o zbiorze $H_{A'B'C'D'}$ prawa strona tej równoważności stwierdza, że formuła $\varphi \iff \psi$ jest tautologią. Zakładamy ponadto lewą stronę tej równoważności. Stąd otrzymujemy, że formuła $\varphi \iff \psi$ jest tautologią.

Weźmy cztery dowolne zbiory $A$, $B$, $C$ i $D$. Chcemy teraz z własności (1) wywnioskować, że $L_{ABCD} = P_{ABCD}$. Aby to zrobić, wystarczy wykazać, że

$$\forall h \in H_{ABCD}\ h(\varphi \iff \psi) = T.$$

Fakt ten jest oczywistą konsekwencją tego, że $\varphi \iff \psi$ jest tautologią (tautologię są spełnione dla wszystkich wartościowań, a więc także dla wartościowań ze zbioru $H_{ABCD}$). $\square$

Aby wykorzystać to twierdzenie trzeba jeszcze skonstruować zbiory $A'$, $B'$, $C'$ i $D'$ takie, że zbiór $H_{A'B'C'D'}$ zawiera wszystkie możliwe wartościowania zmiennych zdaniowych $a$, $b$ $c$ i $d$. Weźmy dowolne wartościowanie $h$ tych zmiennych. Dla tego wartościowania wybieramy (dowolnie) pewien element $x_h$. Z wybranych w ten sposób elementów konstruujemy potrzebne nam zbiory w następujący sposób: $x_h$ uznajemy za element zbioru $A'$ wtedy i tyko wtedy, gdy $h(a) = T$. Analogicznie definiujemy pozostałe zbiory.

Dla zdefiniowanych w ten sposób zbiorów sprawdzamy dowodzoną równość. Jeżeli równość ta zachodzi, to z wykazanego twierdzenia otrzymujemy, że zachodzi dla wszystkich możliwych zbiorów.

# Zadanie 5

Rodzina zbiorów $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest zstępująca, jeżeli $X_{n+1} \subseteq X_n$ dla każdego $n \in N$. Ciąg liczb naturalnych $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ jest rosnący, jeżeli $a_n < a_{n+1}$ dla każdego $n \in N$. Niech $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ będzie ciągiem rosnącym, a $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ – zstępującą rodziną zbiorów. Udowodnij, że

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{a_n}.$$

**Rozwiązanie 1.**

*Lemat 1.1. Jeżeli ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest rosnący, to $a_n \geq n$ dla każego $n \in \mathbb{N}$.*

*Dowód.* Przez indukcję względem $n$. Skoro $a_0 \in \mathbb{N}$, to $a_0 \geq 0$. Przypuśćmy, że $a_n \geq n$. Skoro ciąg jest rosnący, to $a_{n+1} > a_n \geq n$. Zatem $a_{n+1} \geq n + 1$.

*Lemat 1.2. Jeżeli rodzina $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ jest zstępująca, to $X_n \subseteq X_m$ dla wszelkich $n, m \in \mathbb{N}$ takich, że $m \leq n$.*

*Dowód.* Przez indukcję względem $n$. Jeżeli $m \leq 0$, to $m = 0$, więc $X_0 \subseteq X_m$. Przypuśćmy, że $X_n \subseteq X_m$ dla $m \geq n$. Skoro rodzina jest zstępująca, to $X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq X_m$ dla $m \geq n$. Ponieważ nadto $X_{n+1} \subseteq X_m$ dla $m = n + 1$, to $X_{n+1} \subseteq X_m$ dla dowolnego $m \leq n + 1$.

Na mocy zasady ekstensjonalności wystarczy pokazać, że dla dowolnego $x$ spełniona jest równoważność

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \iff x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} X_{a_m}.$$

Z definicji przekroju rodziny zbiorów oznacza to, że dla dowolnego $x$ zachodzi

$$\forall n{\in}\mathbb{N}\; x \in X_n \iff \forall m{\in}\mathbb{N}\; x \in X_{a_m}.$$

Aby wykazać żądaną w zadaniu równoważność, uzasadnimy osobno dwie implikacje.

„$\Rightarrow$” Wiemy, że dla dowolnej liczby naturalnej $n$ zachodzi $x \in A_n$. Dla każdego $m$ liczba $a_m$ jest liczbą naturalną, zatem $x \in A_{a_m}$.

„$\Rightarrow$” Przypuśćmy, że $x \in X_{a_m}$ dla dowolnego $m$. Niech $n \in \mathbb{N}$. Z lematu 1.1 wiemy, że $a_n \geq n$. Z założenia wynika, że $x \in A_n$. Z lematu 1.2 wnioskujemy, że $X_{a_n} \subseteq X_n$. Zatem $x \in X_n$.

**Rozwiązanie 2.** Nie jest to rozwiązanie najprostsze, ale zawiera pomysł, który pozwala na odejście od bardzo formalnego rachunku logicznego. Aby uprościć wzory uzupełniamy dany ciąg liczb naturalnych o wyraz $a_{-1} = -1$. Tak uzupełniony ciąg jest nadal rosnący i każda liczba naturalna jest większa od pierwszego wyrazu tego ciągu (czyli od wyrazu o numerze -1).

Główna część rozwiązania wynika z następujących wzorów:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=a_{k-1}+1}^{a_k} X_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_{a_n}.$$

Dalej wystarczy uzasadnić równości z tego wzoru.

Oczywiście, zaczynamy od dowodu pierwszej równości. Równość ta zachodzi, ponieważ po obu stronach równości mamy właściwie przekroje tej samej rodziny zbiorów. Aby bardziej formalnie wykazać zawieranie $\bigcap_{n=0}^{\infty} X_n \subseteq \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=a_{k-1}+1}^{a_k} X_n$, weźmy dowolny element $x \in \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$. Wystarczy wykazać, że $x \in X_n$ dla dowolnych liczb $k \in N$ oraz $n \in N$ takich, że $a_{k-1} < n \leq a_k$. Jest to bezpośrednia konsekwencja wyboru elementu $x$.

Odwrotne zawieranie wynika z faktu, że każda liczba naturalna znajduje się między dwoma, kolejnymi wyrazami ciągu $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, a dokładniej

$$\forall n \in N \; \exists k \in N \; a_{k-1} < n \leq a_k.$$

Jeżeli trzeba to udowodnić, to warto posłużyć się zasadą indukcji.

Aby dowieść to drugie zawieranie, bierzemy $x \in \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcap_{n=a_{k-1}+1}^{a_k} X_n$ i dowolną liczbę $n \in N$. Będziemy uzasadniać, że $x \in X_n$. Dla liczby $n$ znajdujemy $k \in N$ takie, że $a_{k-1} < n \leq a_k$. Z założonej własności $x$ wynika najpierw, że $x \in \bigcap_{n=a_{k-1}+1}^{a_k} X_n$, a następnie, że $x \in X_n$. W ten sposób pierwsza równość została udowodniona.

Druga równość jest konsekwencją zstępowania rodziny $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$. Przekrój skończenie wielu zbiorów porównywalnych w sensie inkluzji jest najmniejszym z tych zbiorów, czyli

$$\bigcap_{n=a_{k-1}+1}^{a_k} X_n = X_{a_{k-1}+1} \cap X_{a_{k-1}+2} \cap \ldots \cap X_{a_k} = X_{a_k}.$$

Oznacza to, że przekroje po obu stronach drugiej równości są przekrojami tego samego ciągu zbiorów, a więc są równe. Trochę dokładniejsze uzasadnienie powyższej równości może korzystać z zasady indukcji i wzorów

$$\bigcap_{n=p}^{q+1} X_n = (\bigcap_{n=p}^{q} X_n) \cap X_{q+1} = X_q \cap X_{q+1} = X_{q+1}.$$

*Opracowanie: A. Kościelski i T. Wierzbicki*