Logika dla informatyków

Egzamin końcowy

1 lutego 2005

Zadanie 1 (10 pkt.). Sformułuj zasadę indukcji matematycznej. Niech $X \subseteq \mathbb{N}$. Udowodnij przy pomocy indukcji, że jeśli

- $0 \in X$, $1 \in X$ oraz $2 \in X$,
- dla dowolnego $x \in \mathbb{N}$, z tego, że $x \in X$, $x+1 \in X$ oraz $x+2 \in X$ wynika, że $x+3 \in X$,

to $X = \mathbb{N}$.

Zadanie 2 (10 pkt.). Niech $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Symbol f^n oznacza n-krotne złożenie funkcji f:

$$\begin{aligned} f^0(x) &= x, \\ f^{n+1}(x) &= f(f^n(x)), \end{aligned}$$

dla dowolnych $n, x \in \mathbb{N}$. Rozważmy relację $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ taką, że

$$xRy \iff \exists n, m \in \mathbb{N}\ f^n(x) = f^m(y).$$

Pokaż, że R jest relacją równoważności. Ile klas abstrakcji ma relacja R, jeżeli funkcja f jest zdefiniowana wzorem $f(x) = \lfloor x/2 \rfloor$? Opisz te klasy abstrakcji i uzasadnij odpowiedzi.

Zadanie 3 (10 pkt.). Czy poniższa równość zachodzi dla dowolnych zbiorów A, B, X i Y:

$$(X \times Y) \setminus (A \times B) \;=\; (X \setminus A) \times B \cup A \times (Y \setminus B)?$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4 (10 pkt.). Przypomnijmy, że podział P jest *drobniejszy* niż podział Q, jeżeli dla każdego $X \in P$ istnieje $Y \in Q$ taki, że $X \subseteq Y$. Używając wyłącznie symboli

$$\forall \quad \exists \quad A \quad P \quad Q \quad x \quad X \quad Y \quad Z \quad \in \quad \notin \quad \vee \quad \wedge \quad (\quad)$$

napisz formuły rachunku kwantyfikatorów mówiące, że:

1. Rodzina zbiorów P nie jest podziałem zbioru A.
2. Podział P nie jest drobniejszy niż podział Q.

Zadanie 5 (10 pkt.). Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B i C zbiory $\left(C^B\right)^A$ oraz $C^{A \times B}$ są równoliczne.

— *verte* →

Imię i nazwisko ....

Zadanie 6 (10 pkt.). Niech A będzie n-elementowym zbiorem uporządkowanym liniowo relacją $\leq$, gdzie $n \geq 5$. Na zbiorze A^2 definiujemy relację $\preceq$ w następujący sposób:

$$\langle a_1, a_2\rangle \preceq \langle b_1, b_2\rangle \quad \Leftrightarrow \quad (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2) \vee (a_1 < b_1 \wedge a_2 < b_2),$$

gdzie $a < b$ oznacza, że $a \leq b$ i $a \neq b$.

Zaznacz zdania prawdziwe, wpisując krzyżyk do odpowiadających im kwadratów.

1. Porządek $\preceq$ jest regularny. .... ☐
2. W $\langle A^2, \preceq\rangle$ istnieje element najmniejszy. .... ☐
3. Liczba elementów maksymalnych w A^2 wzgledem porządku $\preceq$ wynosi
   - n .... ☐
   - $n-1$ .... ☐
   - $\lfloor\sqrt{2}\,n-1\rfloor$ .... ☐
   - $2n-1$ .... ☐
   - $2n+1$ .... ☐
4. Liczba elementów zbioru A^2, które są jednocześnie minimalne i maksymalne wzgledem porządku $\preceq$ wynosi
   - $n-1$ .... ☐
   - 1 .... ☐
   - 0 .... ☐
   - $n+1$ .... ☐
   - 2 .... ☐
5. Liczba elementów minimalnych w A^2 wzgledem porządku $\preceq$ wynosi
   - n .... ☐
   - $\lfloor\sqrt{2}\,n-1\rfloor$ .... ☐
   - $n+1$ .... ☐
   - $2n-1$ .... ☐
   - n^2 .... ☐
6. W $\langle A^2, \preceq\rangle$ istnieje łańcuch długości
   - n .... ☐
   - $\lfloor\sqrt{2}\,n-1\rfloor$ .... ☐
   - $\lfloor n/2\rfloor$ .... ☐
   - $n+1$ .... ☐
   - 2 .... ☐